

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ETUDE D'UNE EQUATION DIFFÉRENTIELLE
FONCTIONNELLE NON LINÉAIRE RÉGISSANT LES
MOUVEMENTS INSTATIONNAIRES DE FLUIDES SIMPLES

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy pour obtenir le

grade de Docteur-ès-Sciences Mathématiques

par

Michel LUCIUS

Soutenue le 8 Janvier 1970 devant la Commission d'Examen

JURY

Président M J LEGRAS

Examineurs MM R BERKER

C GILORMINI

J GOSSE

1970

SCIENCE ET ARCHITECTURE

ÉTUDE D'UNE ÉTUDE DE CONCEPTION
FONCTIONNELLE DANS L'ARCHITECTURE
MOUVEMENTS ARCHITECTURAUX DE L'ÉCOLE MODERNE

présentée au Directeur de l'École Nationale Supérieure d'Architecture

par

Michel LUCIUS

Admis le 2 Janvier 1976 devant la Commission d'Examen

LE JURY

Président M. J. LEBLANC

Examinateurs MM. R. GARCIN

E. SILVANI

J. BOUQUÉ

1976

LOUDART & CLÉMENT
RELIEURS

11, Rue Sainte-Anne, 11
Tél. 52.80.09 - NANCY

COLLECTION DES THESES DE LA FACULTE DES SCIENCES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ETUDE D'UNE EQUATION DIFFÉRENTIELLE
FONCTIONNELLE NON LINÉAIRE RÉGISSANT LES
MOUVEMENTS INSTATIONNAIRES DE FLUIDES SIMPLES

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Nancy pour obtenir le
grade de Docteur-ès-Sciences Mathématiques

par

Michel LUCIUS

Soutenue le 8 Janvier 1970 devant la Commission d'Examen

JURY

President M J LEGRAS

Examineurs MM R BERKER

C GILORMINI

J GOSSE

1970



ANNEE SCOLAIRE 1968 - 1969

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - ROUBAULT.Professeurs honoraires : MM. RAYBAUD - LAFFITE - LERAY - JOLY - LAPORTE - EICHBORN - CAPELLE - GODEMENT - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMAN - LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CHAPELLE - CORNUBERT - GUERIN - WAHL.Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET - M^{le} MATHIEU.PROFESSEURS

MM. ROUBAULT	Géologie	GAYET	Physiologie
VEILLET	Biologie animale	HADNI	Physique
BARRIOL	Chimie théorique	★ BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	DUCHAUFOR	Pédologie
GUILLIEN	Electronique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	NEEL	Chimie organique
			industrielle
BOLFA	Minéralogie	BERNARD	Géologie appliquée
NICLAUSE	Chimie	★ CHAMPIER	Physique
FAIVRE	Physique appliquée	★ GAY	Chimie biologique
AUBRY	Chimie minérale	STEPHAN	Zoologie
COPPENS	Radiogéologie	★ CONDE	Zoologie
DUVAL	Chimie	★ WERNER	Botanique
FRUHLING	Physique	EYMARD	Calcul différentiel et
			intégral
HILLY	Géologie	LEVISALLES	Chimie organique
LE GOFF	Génie chimique	FELDEN	Physique
SUHRER	Physique expérimentale	★ GOSSE	Mécanique physique
CHAPON	Chimie biologique	★ DAVOINE	Physique (ENSMIN)
HEROLD	Chimie minérale indus.	HORN	Physique (1er cycle)
SCHWARTZ B.	Exploitation minière	★ ROCCI	Géologie
MALAPRADE	Chimie	★ Mme LUMER	Mathématiques
★ MANGENOT	Botanique	DELPUECH	Chimie physique

N...	Chimie biologique
N...	Mécanique appliquée
N...	Analyse supérieure
N...	Méthodes mathématiques de la physique
N...	Mécanique rationnelle

(★) Professeur titulaire à titre personnel.

PROFESSEURS SANS CHAIRE

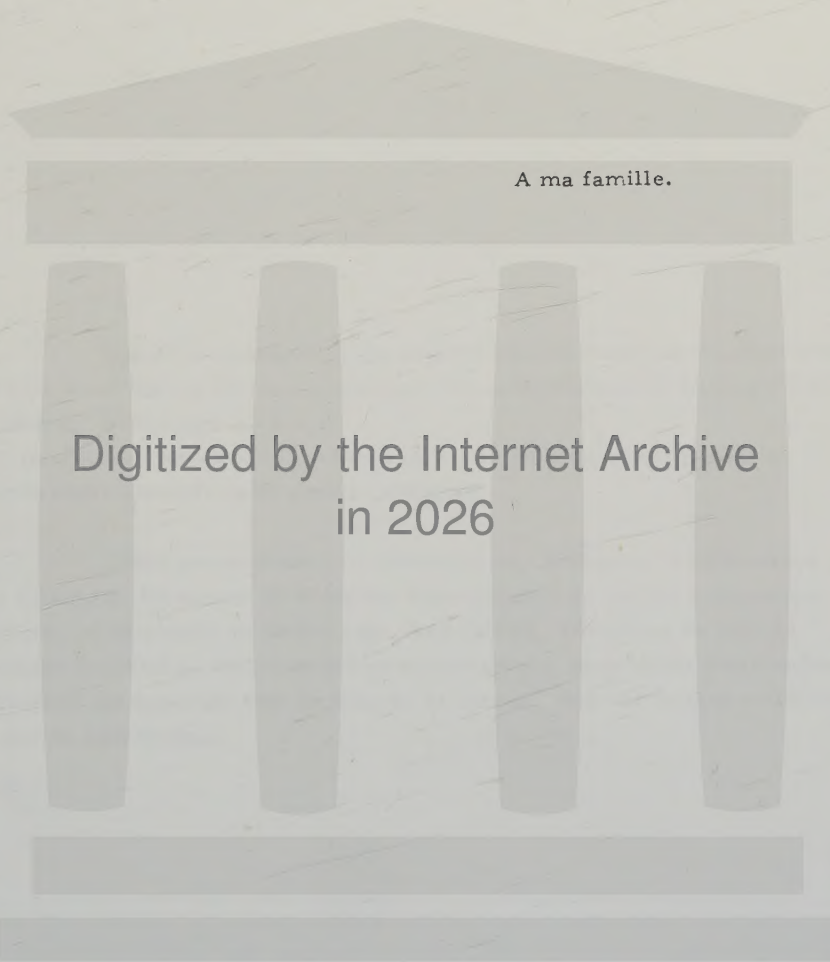
Mme	BASTICK	Chimie P. C. Epinal	FLECHON	Physique P. C.
MM	GUDEFIN	Physique	Mlle HUET	Mathématiques C. B. G.
	VUILLAUME	Psychophysiologie	VIGNES	Métallurgie
	FRENTZ	Biologie animale	BALESDENT	Thermodynamique
	MARI	Chimie (ISIN)	BLA ZY	Chimie appliquée (ENSIC)
	AUROUZE	Géologie	JANOT	Minéralogie appliquée
	DEVIOT	Physique du solide	CACHAN	Physique P. C. Epinal
				Entomologie appliquée (ENSA)

MAITRES DE CONFERENCES

MM	JACQUIN	Pédologie et Chimie agricoles	BAVEREZ	Chimie (ENSIC)
	MAINARD	Physique M. P.	CHAMBON	Exploitation minière
	PAULMIER	Mécanique expérimentale	HUSSON	Physique (ENSEM)
	PROTAS	Minéralogie	GERL	Physique
	JOZEFOWICZ	Physico-chimie	WEISSLINGER	Physique
	JURAIN	Géologie C. B. G.	ROQUES	Chimie minérale
	RIVAIL	Chimie appliquée (CUCES)	FERRIER	Mathématiques
	VILLERMAUX	Génie chimique	N...	Mécanique des fluides (ISIN)
	METCHE	Biochimie appliquée (Brasserie)	N...	Mécanique (ISIN)
	PAIR	Mathématiques appliquées	N...	Mathématiques
	BAUMANN	Physique 1 ^{er} cycle	N...	Mathématiques P.C.
	DURAND	Physique	N...	Mathématiques C. E. G.
	GRANDE	Physique (ISIN)	N...	Physiologie animale
	DEPAIX	Probabilités et statistiques		Mathématiques M. P.

CHARGES D'ENSEIGNEMENTS

MM. AMARIGLIO - COËURE - DEVRAINVILLE - GILORMINI - GIRARDEAU - HILY - MAURIN - NOVERRAZ - OVAERT - RUYER - WEBER.



A ma famille.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Ce présent travail a été réalisé sous la direction de Monsieur le Professeur Walter NOLL, professeur de mathématiques à Carnegie Mellon University, Pittsburgh (U. S. A.).

Qu'il trouve ici l'expression de notre plus vive reconnaissance pour les innombrables conseils qu'il nous a prodigués.

Nous remercions très sincèrement, Monsieur le Professeur Jean LEGRAS, Directeur de l'Institut Universitaire de Calcul Automatique de Nancy, et Monsieur le Professeur Jean GOSSE, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique, pour l'aide inestimable qu'ils nous ont apportée tout au long de ce travail, tant sur le plan matériel que sur le plan humain.

Nous tenons à exprimer ici notre profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Ratip BERKER, professeur associé de Mécanique théorique à la Faculté des Sciences de Paris, pour la grande attention qu'il a porté à notre étude et pour l'honneur qu'il nous a fait de participer au Jury.

Nous exprimons notre gratitude à Monsieur Claude GILORMINI, Maître de Conférences à l'Université de Nancy, pour l'amabilité avec laquelle il a accepté de critiquer ce mémoire et pour sa participation au Jury.

Nous remercions Monsieur le Professeur Jacques Louis LIONS, Directeur du département de Mathématiques Appliquées à l'Université de Paris, qui nous a fait l'honneur de s'intéresser à nos recherches.

Nos remerciements vont enfin à Mademoiselle Danielle MARCHAND, qui, par sa compétence et son dévouement, a permis la réalisation matérielle de cette thèse.

NOTATIONS et CONVENTIONS

$(\mathfrak{B})$	milieu continu
$(\mathfrak{E}_0)$	espace euclidien de référence
X	configuration de $(\mathfrak{B})$ dans $\mathfrak{E}_0$
s, t, z, T	temps ($0 \leq s < +\infty$; $0 < T < +\infty$)
$\vec{x}, \vec{x}$	vecteurs positions d'une particule de $(\mathfrak{B})$ aux instants z et t
X	élément de $(\mathfrak{B})$ (particule)
X_t	fonction de déformations relatives
$F_t(z)$	gradient de déformations relatives (fonction tensorielle)
$\vec{F}(s)$	histoire du gradient de déformations relatives
$\vec{V}(\vec{x}, t)$	vitesse de la particule X , qui à l'instant t , occupe la position $\vec{x}$
$\mathcal{T}, T^{ij}$	tenseur des contraintes
p	pression hydrostatique locale
$\mathcal{Q}, \mathcal{R}$	tenseurs orthogonaux ($\mathcal{Q}^T = \mathcal{Q}^{-1}$)
$\mathfrak{H}$	fonctionnelle de réponse d'un fluide simple
$\mathcal{T}, \sigma_i^*, \sigma_i^*$	fonctionnelles de réponse tangentielle et normales
$\mathcal{T}$	fonctionnelle tangentielle associée à $\mathcal{T}^*$
$\mathcal{E}$	restriction à $\mathfrak{E}_1$ de la fonctionnelle $\mathcal{T}$
$\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_1$	différentielle de Fréchet d'ordre un de $\mathcal{T}$ ou fonctionnelle linéaire tangente ($\mathfrak{Z}_1$: restriction de $\mathfrak{Z}$ à $\mathfrak{E}_1$)
z	fonction viscométrique tangentielle
$\vec{y}$	accélération de X
$\vec{f}$	vecteur force par unité de volume
g	accélération de la pesanteur
ρ	masse volumique du fluide considéré
ω	vitesse angulaire d'une particule X de $(\mathfrak{B})$ dans un mouvement de Couette ; κ gradient de vitesse en mouvement stationnaire
$(x^i)_{i=1,2,3}$	système de coordonnées ou composantes contravariantes de $\vec{x}$
(x, y, z)	coordonnées cartésiennes
(r, θ, z)	coordonnées cylindriques ; (r, θ, φ) coordonnées sphériques
$(\vec{e}_i), ((\vec{e}_i))$	base naturelle associée aux systèmes de coordonnées
	$(r, \theta, z) : \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}$ (resp. (r, θ, φ)) $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}$
$e_i = \vec{e}_i $	longueur de $\vec{e}_i$; $\underline{e}_i = \underline{\vec{e}}_i $
$(\vec{e}^{<i>}), (\underline{\vec{e}}_i)$	bases orthonormées associées à $(\vec{e}_i)$ et $(\underline{\vec{e}}_i)$
	$\vec{e}^{<i>} = \frac{1}{e_i} \vec{e}_i$; $\underline{\vec{e}}_i = \frac{1}{\underline{e}_i} \underline{\vec{e}}_i$ (sans sommation)

g, g_{ij}, g^{ij}	tenseur métrique fondamental
μ	mesure positive, définie sur les sous ensembles de Borel de $\mathbb{R}^+$
$\mu_0 = \mu(\{0\})$	atome en 0 de la mesure μ
h	fonction d'influence $\mu([s_1, s_2]) = \int_{s_1}^{s_2} h(s) ds$
$H = \mu([0, +\infty[)$	
$\mathcal{E} = L^2(\mathbb{R}^+, \mu)$	$(f \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \ f\ _{\mathcal{E}} < +\infty)$
$\mathcal{E}' = L^2([R_1, R_2] \times [0, T] \times \mathbb{R}^+, \lambda \times \mu)$	$(0 < R_1 < R_2 < +\infty)$
	$(f \in \mathcal{E}' \Leftrightarrow \ f\ _{\mathcal{E}'} < +\infty)$
$\mathcal{E}_1 = \{f(x, t, \cdot) \in \mathcal{E} \mid (x, t) \in [R_1, R_2] \times [0, T]; f \in \mathcal{E}'\}$	
	$(f \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow \ f\ _{\mathcal{E}_1} < +\infty)$
$I =]R_1, R_2[$	
$Q = I \times]0, T[$	
$H^1(Q) = \{w : Q \rightarrow \mathbb{R} \mid w \in L^2(Q), w' \in L^2(Q)\}$	Espace de Sobolev d'ordre 1
	$(\ w\ _{H^1(Q)}^2 = \ w\ _{L^2(Q)}^2 + \ w'\ _{L^2(Q)}^2)$
$H_0^1(Q) = \{w \in H^1(Q) \mid \lim_{r \rightarrow R_1} w(x, t) = \lim_{r \rightarrow R_2} w(x, t) = 0\}$	
$L^2(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}, \ f\ ^2 = \int_{R_1}^{R_2} f^2(x) dx < +\infty\}$	
$H^1(I)$	Espace de Sobolev d'ordre 1 défini sur l'ouvert I
$L^2([0, T]) = \{f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid \ f\ _{L^2([0, T])}^2 = \int_0^T f^2(t) dt < +\infty\}$	
$L^2(Q) = \{f : Q \rightarrow \mathbb{R} \mid \ f\ _{L^2(Q)}^2 = \int_{R_1}^{R_2} (\int_0^T f^2(x, t) dt) dx < +\infty\}$	
$\mathcal{D}'(Q)$	espace des formes linéaires continues sur Q
$\mathcal{E}'^{\pm} = L^2([0_1, \frac{\pi}{2}] \times [0, T] \times \mathbb{R}^+, \lambda \times \mu)$	
$\mathcal{E}_1^{\pm} = \{f(0, t, \cdot) \in \mathcal{E} \mid (0, t) \in [0_1, \frac{\pi}{2}] \times [0, T]; f \in \mathcal{E}'^{\pm}\}$	
M	borne supérieure de $\mathfrak{B}(\cdot, \cdot)$ sur $\mathcal{E}$
μ_0	borne inférieure de $\mu(\cdot, \cdot)$ sur Q
$\mu_g(\mu(0))$	coefficients de viscosité locale au voisinage de la fonction g (resp. au voisinage de 0)

$K_g (K_{(0)})$ fonction de relaxation associée à la fonction g
(resp. à 0)

$$\mu_n^* = \mu_{f_n} \quad n \geq 1$$

$$K_{n-1} = K_{f_n}$$

$$\alpha_0 = \frac{2 T}{\rho \mu_0 R_1^6}, \quad \beta_0 = \frac{1}{(\mu_0 R_1^3)^2}, \quad c_0 = [\mu(\{0\}) + \mu(\cdot) 0, + \infty(\cdot)] \times \beta_0 R_2^2$$

$$L = \left(\frac{M}{\mu_0}\right)^2 \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^6 [\mu(\{0\}) + \mu(\cdot) 0, + \infty(\cdot)]$$

Conventions

Nous noterons, suivant les cas $par s \rightarrow k(s)$ ou par $k(\cdot)$ la fonction qui prend pour s , la valeur $k(s)$.

Si la fonction k dépend de plusieurs variables, nous expliciterons toujours les variables fixées.

Exemple : nous noterons (selon les besoins) par $s \rightarrow k(r, s, t)$ ou par $k(r, \cdot, t)$ la fonction de la seule variable s , qui prend pour r et t fixés, la valeur $k(r, s, t)$.

INTRODUCTION

De nombreux travaux théoriques et expérimentaux concernant le comportement des fluides non newtoniens ont été publiés récemment ; citons en particulier B. Coleman, H. Markovitz, W. Noll [1]*. Ces études ont montré que la connaissance des phénomènes caractéristiques de ces milieux était liée à la détermination de trois fonctionnelles matérielles associées aux contraintes tangentielles et normales, se développant au sein du fluide en écoulement viscométrique.

Cette détermination a d'ailleurs été réalisée par H. Markovitz [2] et dans nos laboratoires [3] pour des régimes stationnaires de vitesses et contraintes.

Jusqu'alors peu d'articles ont paru sur l'étude de ces phénomènes en régimes non stationnaires de vitesse. Notons toutefois les travaux théoriques récents de B. Coleman et M. Gurtin [4] sur la stabilité des ondes de cisaillement en milieu viscoelastique non linéaire, ainsi que ceux de H. Herrera [5] et M. Lucius [6].

Mais aucune étude générale n'a porté sur le régime d'établissement des vitesses et contraintes dans un écoulement viscométrique de fluides simples pour des fonctionnelles matérielles non linéaires.

Ce sera l'objet du présent mémoire.

Le problème est envisagé selon deux points de vue : d'une part en le considérant sous l'aspect mathématique et d'autre part en regardant son origine mécanique.

L'utilisation combinée des équations fondamentales de la dynamique et de la loi de comportement des fluides simples conduit à l'écriture d'une équation différentielle fonctionnelle non linéaire qui régit le mouvement considéré.

Le problème mathématique étudié consiste à établir un ensemble de conditions suffisantes portant sur la fonctionnelle tangentielle de réponse du milieu pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation qui satisfait à des conditions initiales et aux limites données.

A ce propos est développée une méthode originale de résolution que l'on peut considérer comme une généralisation des méthodes d'approximations successives à des problèmes bi-dimensionnels (espace, temps).

Cette méthode est exposée au début du chapitre II.

* Les chiffres figurant entre crochets indiquent le n° de référence bibliographique située à la fin de cet ouvrage.

L'application de ce procédé et l'utilisation de certains résultats d'analyse fonctionnelle conduit à l'existence de solutions liées à des problèmes linéaires "héréditaires" c'est-à-dire pour lesquels le passé tout entier influence sensiblement le comportement présent. Une étude générale de ces équations est développée dans la seconde moitié du chapitre II.

Dans cette partie apparaissent de façon naturelle des considérations sur l'énergie dissipée par frottement interne au sein du milieu en mouvement ; à ce propos, nous avons été amené à démontrer certaines inégalités originales. Nous les retrouverons aussi dans cette seconde partie du chapitre II.

Le chapitre III porte essentiellement sur l'existence et l'unicité de la solution du problème envisagé. Un ensemble d'estimations a priori permet de situer la solution dans un espace fonctionnel de type Sobolev d'ordre un.

Enfin, la recherche du comportement asymptotique de la solution permet de rejoindre des résultats déjà connus pour des écoulements viscométriques stationnaires.

La seconde partie de cette étude (chapitre IV) apparaît comme une application de la partie théorique et porte sur la possibilité de détermination expérimentale de certaines fonctions matérielles caractéristiques du milieu considéré.

Envisagé ici sous l'aspect mécanique, le problème apparaît en quelque sorte comme l'inverse du problème mathématique. En effet pour ce dernier, toutes les fonctions ou fonctionnelles qui figurent dans les équations sont supposées connues.

En pratique il n'en est pas ainsi, et nous avons voulu montrer comment la théorie précédemment exposée permettait de réaliser une telle détermination.

Afin de montrer que la méthode de résolution du chapitre II n'était nullement liée au type de mouvement choisi nous l'avons appliqué à d'autres modes d'écoulement (plan-cône, cisaillement simple).

I 1 RAPPELS CONCERNANT LES FLUIDES SIMPLES

Nous allons faire une analyse bibliographique sommaire qui nous conduira à la formulation de notre problème.

I.1.1 Cinématique des fluides simples ([17] p. 49-56)

Considérons un milieu continu ($\mathfrak{B}$) formé de particules notées X . Soit $\vec{x}$ la position dans l'espace euclidien $\mathfrak{E}_0$ de la particule X à l'instant t , considéré comme l'instant présent.

Supposons qu'à l'instant τ , $\tau \leq t$, la même particule occupait la position $\vec{\xi}$ dans $\mathfrak{E}_0$. Afin de relier $\vec{\xi}$, τ , $\vec{x}$, t nous poserons

$$(1) \quad \vec{\xi} = \chi_t(\vec{x}, \tau)$$

la fonction χ_t porte le nom de fonction de déformations relatives. Le gradient de χ_t relativement à $\vec{x}$, soit

$$(2) \quad \underline{F}_t(\tau) = \nabla \chi_t(\vec{x}, \tau)$$

s'appelle le gradient de déformations relatives et

$$(3) \quad \boxed{\underline{F}(s) = \underline{F}_t(t-s)} \quad s \geq 0$$

l'histoire du gradient de déformations relatives. Cette fonction tensorielle décrit la relation entre la configuration locale à l'instant présent et celle qui existait s instants auparavant. La notation utilisée, $\underline{F}(s)$, ne doit pas faire oublier que $\underline{F}$ dépend également du point matériel considéré et de l'instant présent.

Remarque : Il peut être utile dans certains problèmes de définir l'état du fluide par une description eulérienne du mouvement, c'est-à-dire par la donnée en tout point $\vec{x}$ de $\vec{V}(\vec{x}, t)$. Il n'y a alors aucune difficulté à reconstituer χ_t puisque $\vec{\xi}(\tau)$ vérifie

$$(4) \quad \begin{cases} \vec{\xi}(\tau) = \vec{V}(\vec{\xi}(\tau), \tau) \\ \vec{\xi}(t) = \vec{x} \end{cases}$$

Nous ne considérerons par la suite que des mouvements isovolumes c'est-à-dire ceux pour lesquels le volume de toute partie de ($\mathfrak{B}$) reste inchangé au cours du temps.

Cette hypothèse se traduit par

$$(5) \quad \det(\underline{F}(s)) = 1$$

I. 1.2 Dynamique des fluides simples

Nous savons que l'état dynamique d'un fluide quelconque est caractérisé, en tout point et à tout instant, par le tenseur des contraintes $\underline{T}(\vec{x}, t)$. Nous dirons qu'un fluide est un fluide simple incompressible si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites.

- (i) seuls les mouvements isovolumes sont possibles ;
- (ii) le tenseur des contraintes $\underline{T}(\vec{x}, t)$, en tout point et à tout instant, est déterminé* par l'histoire du gradient de déformations relatives. Nous traduirons l'hypothèse (i) par

$$(6) \quad \det(\underline{F}(s)) = 1$$

l'hypothèse (ii) implique l'existence d'une fonctionnelle $\mathcal{H}$, définie sur l'espace des tenseurs d'ordre deux, $\mathcal{L}_2$, à valeurs dans l'espace des tenseurs symétriques $\mathcal{S}_2$, telle que

$$(7) \quad \underline{T} + p \underline{1} = \mathcal{H}_{s=0}^{+\infty}(\underline{F}(s))$$

où p désigne la pression hydrostatique locale.

Nous omettrons par la suite l'adjectif "incompressible" lorsque nous parlerons d'un fluide simple incompressible, mais ceci reste sous-entendu.

I. 1.3 Principe d'objectivité matérielle ([7] p. 44-47)

W. Noll a montré que la fonctionnelle $\mathcal{H}$ apparaissant dans l'équation (7) ne pouvait être complètement arbitraire mais devait satisfaire à une certaine identité (que nous donnerons ci-après) déduite du principe d'objectivité matérielle.

Ce principe peut s'énoncer comme suit :

"Toute équation de comportement d'un milieu continu ($\mathcal{B}$) doit être invariante par changement de repère".

Examinons ici l'incidence d'un tel principe sur la fonctionnelle $\mathcal{H}$. Quel que soit le mode de description cinématique choisi pour décrire le mouvement ($\mathcal{B}$), ce matériau occupe, à l'instant t , une certaine position dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_0$ que nous pourrions caractériser par l'application bijective.

$$\chi : \begin{aligned} (\mathcal{B}) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{E} \times \mathbb{R} \\ (X, t) &\rightarrow \chi(X, t) = \vec{x}(t) \end{aligned}$$

* (à un tenseur sphérique près).

W. Noll [8] a montré qu'un changement quelconque de repère doit être de la forme

$$(8) \quad \vec{x}^*(t^*) = \chi^*(X, t) = c(t) + Q(t) \chi(X, t)$$

où c est une fonction arbitraire et Q un tenseur orthogonal. Par ailleurs, par un tel changement de repère $\underline{T}(X, t)$ devient

$$(9) \quad \underline{T}^*(X, t) = Q(t) \underline{T}(X, t) Q(t)^T$$

Il résulte alors du principe d'objectivité matérielle que si l'équation (7) est vérifiée par un champ de déplacements et un champ de contraintes définis par

$$\vec{\sigma} = \chi(X, t) \text{ et } \underline{T} = \underline{T}(X, t)$$

alors elle doit être vérifiée pour tout champ équivalent $\chi^*, \underline{T}^*$ tels que

$$(10) \quad \begin{cases} \chi^*(X, t^*) = c(t) + Q(t) \chi(X, t) \\ \underline{T}^*(X, t) = Q(t) \underline{T}(X, t) Q(t)^T ; t^* = t - a \ (a \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Or on peut aisément vérifier que si $\underline{F}$ désigne l'histoire du gradient de déformations relatives correspondant à un repère défini par χ , alors pour χ^*

$$(11) \quad \begin{cases} \underline{F}^*(s) = \underline{R}(s) \underline{F}(s) \underline{R}(0)^T \\ \underline{R}(s) = Q(t-s) \end{cases}$$

Ainsi, pour satisfaire au principe d'objectivité matérielle, la fonctionnelle $\mathcal{H}$ doit vérifier la relation

$$(12) \quad \underline{R}(0) \int_{s=0}^{+\infty} \mathcal{H}(\underline{F}(s)) \underline{R}(0)^T ds = \int_{s=0}^{+\infty} \mathcal{H}(\underline{R}(s) \underline{F}(s) \underline{R}(0)^T) ds$$

pour toute fonction $\underline{F}$ et pour tout tenseur orthogonal $\underline{R}$. Nous verrons par la suite les conséquences d'une telle relation.

1.1.4 Écoulement viscométrique curvilinéal

Définition. Nous dirons qu'un écoulement est un écoulement viscométrique curvilinéal si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- (i) il existe un système de coordonnées curvilignes orthogonal (x^k) tel que les composantes contravariantes (x^k) de $\vec{V}(\vec{x}, t)$ soient données par $\dot{x}^1 = 0$, $\dot{x}^2 = V(x^1, t)$, $\dot{x}^3 = w(x^1, t)$.
- (ii) les dérivées partielles de V et w par rapport à x^1 s'écrivent

$$V' = f(x^1) q(x^1, t), \quad w' = h(x^1) q(x^1, t).$$

- (iii) les composantes diagonales du tenseur métrique fondamental sont constantes le long des trajectoires.

Signalons que cette définition englobe la quasi-totalité des écoulements laminaires classiques : écoulements de cisaillement simple, de Couette, plan-cône, hélicoïdal...

I.1.5 Ecoulement de Couette

Considérons l'écoulement viscométrique particulier

$$(13) \quad \begin{cases} x^1 = r, & x^2 = \theta, & x^3 = z \text{ avec} \\ \dot{r} = 0, & \dot{\theta} = \omega(r, t), & \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Le gradient de déformations relatives s'écrit

$$(14) \quad \underline{F}_t(z) = \underline{1} - k(z, t) \underline{N}$$

où $\underline{N}$, relativement à la base orthonormée $\vec{e}^{<i>}$, a la forme

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et} \quad k(z, t) = -r \int_t^z \omega'(r, \sigma) d\sigma$$

l'histoire du gradient de déformations relatives s'écrit donc

$$\boxed{\begin{cases} \underline{F}(s) = \underline{1} - g(s) \underline{N} \\ g(s) = r \int_0^s \omega'(r, t-\sigma) d\sigma \end{cases}}$$

Composantes de $\underline{T}(\vec{x}, t)$ sur la base $\vec{e}^{<i>}$

L'application du principe d'objectivité matérielle, et de la relation (12) qui s'en déduit, permet de réduire les composantes de $\underline{T}$ sur la base $\vec{e}^{<i>}$. En effet, un choix convenable du tenseur orthogonal $\underline{R}$ figurant dans (12) (voir [7] p. 430-431) permet de montrer que

$$(16) \quad \begin{cases} T^{12}(r, t) = \sum_{s=0}^{+\infty} (g(s)) ; T^{13}(r, t) = T^{23}(r, t) = 0 \\ T^{11}(r, t) - T^{22}(r, t) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sigma_1^* (g(s)) \\ T^{11}(r, t) - T^{33}(r, t) = \sum_{s=0}^{+\infty} \sigma_2^* (g(s)) \end{cases}$$

Nous noterons que la formule (12) a également pour conséquence

$$\sum_{s=0}^{+\infty} (g(s)) = - \sum_{s=0}^{+\infty} (-g(s)) \quad (\text{fonctionnelle impaire})$$

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \sigma_i^* (g(s)) = + \sum_{s=0}^{+\infty} \sigma_i^* (-g(s)) ; i = 1, 2 \quad (\text{fonctionnelles paires})$$

I. 1. 6 Equations de la dynamique

Rappelons que, sous forme vectorielle, l'équation d'un milieu continu en mouvement s'écrit

$$(17) \quad \rho \vec{f}(\vec{x}, t) + \operatorname{div} \underline{T}(\vec{x}, t) = \rho \vec{\gamma}(\vec{x}, t)$$

où $\vec{f}$ désigne le vecteur force par unité de volume due aux actions extérieures agissant sur $\vec{x}$ et $\vec{\gamma}$, l'accélération correspondante. La relation (16) donne les composantes de $\underline{T}$ sur la base $\vec{e}^{<i>i>}$ associée au système de coordonnées (r, θ, z) ; nous projeterons donc l'équation (17) sur cette base, ce qui donne

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial T^{11}}{\partial r}(r, t) + \frac{1}{r} [T^{11}(r, t) - T^{22}(r, t)] = -\rho r \omega^2(r, t) + \frac{\partial p}{\partial r}(r, t) \\ \frac{\partial}{\partial r} [r^2 T^{12}(r, t)] = \rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t}(r, t) \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \end{cases}$$

Reprenons l'équation (18) dans laquelle nous reportons l'expression (16)₁ de T^{12} ; nous obtenons :

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \mathcal{T}^{*}_{s=0} \left(r \int_0^s \omega'(r, t-\sigma) d\sigma \right) \right] = \rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t}(r, t).$$

Nous retrouvons ainsi la relation (113-5) donnée par W. Noll [7] p. 448. Cette équation, que nous appellerons équation différentielle fonctionnelle, doit permettre, pour des conditions initiale et aux limites données, de déterminer le champ des vitesses au sein du fluide. Mais la fonction inconnue apparaît comme argument d'une fonctionnelle non linéaire dont nous ne connaissons rien a priori (si ce n'est qu'elle est impaire). Le problème ainsi posé dans sa généralité n'admet vraisemblablement pas de solution. Il faut, pour assurer l'existence d'une solution de (19) que la fonctionnelle tangentielle $\mathcal{T}^{*}$ satisfasse à certaines conditions, par exemple de différentiabilité. Le but de cette étude est de donner un ensemble de conditions suffisantes afin d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (19).

I. 1. 7 Fonctionnelle tangentielle associée

Conditions initiale et aux limites.

Revenons à présent sur l'argument de la fonctionnelle $\mathcal{T}^{*}$, à savoir

$$(20) \quad s \longrightarrow g(s) = r \int_0^s \omega'(r, t-\sigma) d\sigma$$

Cette fonction de la variable s , est continue sur $[0, +\infty[$, dérivable en tout point de cet intervalle, sa dérivée étant donnée par

$$g'(s) = f(s) = r \omega'(r, t-s)$$

De plus $g(0) = 0$. En résumé, la donnée de $g(\cdot)$ sur $[0, +\infty[$ entraîne la connaissance de $f(\cdot)$ sur ce même intervalle. Réciproquement la donnée de $f(\cdot)$ sur $[0, +\infty[$ permet la connaissance de $g(\cdot)$; en effet $g(\cdot)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{dg(s)}{ds} = f(s) \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Il y a donc correspondance biunivoque entre les fonctions $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ de sorte qu'il est possible d'introduire une fonctionnelle $\mathcal{T}$ satisfaisant à la relation

$$(21) \quad \boxed{\int_{s=0}^{+\infty} (g(s)) = \int_{s=0}^{+\infty} (f(s))}$$

Nous appellerons $\mathcal{T}$, fonctionnelle tangentielle associée (à $\mathcal{T}^*$). Compte tenu de la relation (22) nous pouvons écrire l'équation différentielle fonctionnelle (19)

$$(22) \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \int_{s=0}^{+\infty} (r \omega'(r, t-s)) \right] = \rho r^3 \frac{\partial \omega}{\partial t}(r, t)}$$

Nous adjoindrons à cette équation les conditions aux limites

$$(23) \quad \begin{cases} \omega(R_1, t) = \Omega_1(t) \\ \omega(R_2, t) = \Omega_2(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(adhérence du fluide aux parois matérielles} \\ \text{entraînées pour } r = R_1 \text{ (resp. } r = R_2) \text{ à la} \\ \text{pour } t > 0 \text{ vitesse angulaire } \Omega_1(\cdot) \text{ (resp. } \Omega_2(\cdot) \text{))} \end{array}$$

et la condition "initiale"

$$(24) \quad \omega(r, t) = \omega_0(r, t) \text{ pour } t \leq 0$$

l'étude présentée en I. 1. 6 va donc porter sur l'ensemble des relations (22), (23), (24).

Remarque : Sans modifier fondamentalement le problème, l'introduction de la fonctionnelle tangentielle associée à $\mathcal{T}^*$, peut avoir des conséquences sur la stabilité de la solution. En effet, $\mathcal{T}^*$, à la différence de $\mathcal{T}$, n'est pas sensible à l'état cinématique présent, puisque $g(0) = 0$.

Dans cette étude nous n'insisterons pas sur ces conséquences; nous les reprendrons par la suite.

Pour résoudre (22) sous les conditions (23) et (24) il nous faut porter notre attention sur les points suivants :

(★) détermination d'un espace fonctionnel dans lequel nous pourrions situer la solution.
Cette partie nécessite l'introduction de quelques autres espaces associés dont nous parlerons au chapitre III.

(★★) définition d'une méthode de résolution qui permette de construire une solution (ce qui prouvera l'existence d'une fonction satisfaisant à (22)).

(★★★) Etude de l'unicité.

Ces trois points seront abordés dans l'ordre au cours des chapitres suivants.

II 1 PRINCIPE DE MEMOIRE EVANESCENTE.

ESPACES FONCTIONNELS

II. 1. 1 Le principe de mémoire évanescence, introduit par B. Coleman et W. Noll (voir par exemple [9]) pour des fonctionnelles de comportement telles que $\mathcal{T}^*$ est basé sur le fait que dans la plupart des phénomènes réels, les déformations qui se sont produites dans le passé lointain ont moins d'influence sur le comportement présent du milieu que celles qui sont apparues dans le passé récent.

Pour traduire cette idée en termes mathématiques, les auteurs ont proposé de considérer l'argument de $\mathcal{T}$ comme élément d'un espace vectoriel normé $\mathcal{E}$, la norme choisie sur cet espace accordant une importance plus grande aux événements récents.

II. 1. 2 Définition de $\mathcal{E}$

Soit μ une mesure positive, définie sur les sous ensembles de Borel de $\mathbb{R}^+$.

Définissons

$$(1) \quad \mathcal{E} = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_{\mathcal{E}}^2 = \int_{[0, +\infty[} f^2 d\mu < +\infty\}$$

que nous noterons plus brièvement

$$\mathcal{E} = L^2(\mathbb{R}^+, \mu)$$

Muni de la norme $f \rightarrow \|f\|_{\mathcal{E}}$ et du produit scalaire associé

$$(f, g)_{\mathcal{E}} = \int_{[0, +\infty[} f g d\mu$$

$\mathcal{E}$ est un espace de Hilbert.

Rappelons brièvement les axiomes fondamentaux traduisant le principe de mémoire évanescence par B. Coleman et V. Mizel [10].

(A) la mesure de $\mathbb{R}^+$ est finie

$$0 < \mu([0, +\infty[) < +\infty$$

(B) si $f \in \mathcal{E}$ alors f^σ doit appartenir à $\mathcal{E}$

$$\text{avec } f^\sigma(s) = \begin{cases} f(0) & 0 \leq s \leq \sigma \\ f(s-\sigma) & \sigma < s < +\infty \end{cases}$$

(f^σ correspond au prolongement statistique de f)

(C) si $f \in \mathcal{E}$ alors $f_\sigma \in \mathcal{E}$

$$\text{avec } f_\sigma(s) = f(s+\sigma) \quad 0 \leq s < +\infty, \sigma > 0.$$

Sous ces hypothèses B. Coleman et V. Mizel ont démontré que les axiomes (A) et (B) impliquaient que μ ait un atome pour $s = 0$ et soit absolument continue sur $]0 + \infty[$.

$$\mu \text{ possède un atome pour } s = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mu(\{0\}) = \bar{\mu}_0 > 0.}$$

μ est absolument continue sur $]0, +\infty[$, signifie qu'il existe une fonction h , appelée fonction d'influence telle que

$$\boxed{\mu([s_1, s_2[) = \int_{s_1}^{s_2} h(s) ds}$$

Une conséquence de résultat est que la norme définie sur $\mathcal{E}$ s'écrit

$$(2) \quad \|f\|_{\mathcal{E}}^2 = \bar{\mu}_0 f(0)^2 + \int_0^{+\infty} f_r^2(s) h(s) ds$$

où $f_r(\cdot)$ désigne la restriction à $]0, +\infty[$ de $f(\cdot)$.

De la même manière

$$(3) \quad \boxed{(f, g)_{\mathcal{E}} = \mu_0 f(0) g(0) + \int_0^{+\infty} f_r(s) g_r(s) h(s) ds}$$

II. 1. 3 Différentielle de Fréchet d'une fonctionnelle définie sur $\mathcal{E}$

En plus des axiomes (A), (B), (C) qui portent sur les éléments de $\mathcal{E}$ il est nécessaire, pour aller plus avant, de supposer la fonctionnelle $\mathcal{T}$ différentiable sur $\mathcal{E}$ selon la définition suivante :

pour tout $g \in \mathcal{E}$, il existe une forme linéaire $\mathcal{L}$, définie et continue sur $\mathcal{E}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{E}$.

$$(4) \quad \mathcal{T}(g+f) = \mathcal{T}(g) + \mathcal{L}(g; f) + o(\|f\|_{\mathcal{E}})$$

où o , symbole de Landau, signifie que

$$\lim_{\|f\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0} \frac{o(\|f\|_{\mathcal{E}})}{\|f\|_{\mathcal{E}}} = 0$$

($\mathcal{L}$ étant linéaire en f)

nous dirons alors que $\mathcal{T}$ admet une différentielle de Fréchet d'ordre un. Nous supposons de plus que $\mathcal{L}$ est continue suivant g , et bornée sur $\mathcal{E}$.

II. 1. 4 Représentation de la fonctionnelle $\mathcal{L}$

Nous utiliserons par la suite le résultat d'analyse suivant :
toute fonctionnelle linéaire continue sur une espace de Hilbert peut être représentée par un produit scalaire défini sur cet espace (cf. Riesz-Nagy [11]). On peut donc appliquer ce résultat à la fonctionnelle $\mathcal{L}$ définie sur $\mathcal{C}$; on obtient alors

$$\mathcal{L}(g; f) = \bar{\mu}_0 k_g(0) f(0) + \int_0^{+\infty} f_r(s) k_g(s) h(s) ds$$

où $g(.) \rightarrow k_g(.)$ définit une fonctionnelle continue sur $\mathcal{C}$.

Définitions.

Nous appellerons coefficient de viscosité locale instantanée

$$(5) \quad \mu_g = \bar{\mu}_0 k_g(0)$$

et fonction de relaxations la fonction matérielle

$$(6) \quad K_g(s) = k_{g_r}(s) h(s)$$

Cette fonction caractérise en effet la relaxation des contraintes dans un fluide simple au repos.

II. 1. 5 Autres espaces fonctionnels

a) Définitions de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_1$

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Nous désignerons par (7)

$$\mathcal{C} = L^2([R_1, R_2] \times [0, T] \times \mathbb{R}^+, \lambda \times \mu)$$

c'est-à-dire l'ensemble des fonctions $f : [R_1, R_2] \times [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{C}}^2 = \bar{\mu}_0 \left(\int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^T f^2(r, t, 0) dt \right) dr \right) + \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^T \left(\int_0^{+\infty} f_r^2(r, t, s) h(s) ds \right) dt \right) dr < +\infty$$

Remarque. Soit $g : [R_1, R_2] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ un élément de $L^2([R_1, R_2] \times [0, T], \lambda^2)$

A partir de g , définissons $g_1 : [R_1, R_2] \times [0, T] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$g_1(r, t, s) = \begin{cases} g(r, t-s) & 0 \leq s < t \\ 0 & s \geq t \end{cases}$$

Alors d'après la définition de $\mathcal{C}'$, $g_1 \in \mathcal{C}$

Définissons également $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(s) = g_1(r, t, s) \quad (r, t \text{ fixés})$$

f est d'après la norme sur $\mathcal{E}'$, un élément de $\mathcal{E}'$, pour presque tout $(x, t) \in] R_1, R_2 [\times] 0, T [$.

Nous désignerons par la suite par $\mathcal{E}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$, formé des fonctions f construites à partir de $g_1 \in \mathcal{E}'$; i. e.

$$\mathcal{E}_1 = \{ f(x, t, \cdot) \in \mathcal{E} \mid (x, t) \in] R_1, R_2 [\times] 0, T [; f \in \mathcal{E}' \}$$

Il est clair que

$$\| |\hat{f}| \|^2_{\mathcal{E}_1} = \| \| f(\cdot, \cdot, s) \|^2_{L^2(] R_1, R_2 [\times] 0, T [, \lambda^2)} \|_{\mathcal{E}}^2$$

définit sur $\mathcal{E}_1$ une norme équivalente à celle définie sur $\mathcal{E}$.

Notations. Pour distinguer les valeurs de $\mathcal{U}(f)$, $f \in \mathcal{E}$ de celles de $\mathcal{U}(\hat{f}_1)$ où $\hat{f}_1$ est définie à partir de $g_1 \in \mathcal{E}'$ nous noterons

$$(8) \quad \mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(\hat{f}_1)$$

b) Espace des fonctions w

Notations. Nous poserons par la suite $I =] R_1, R_2 [$, $0 < R_1 < R_2 < +\infty$

$Q = I \times] 0, T [$, $0 < T < +\infty$.

Comme nous le verrons dans l'étude qui va suivre, il sera nécessaire de déterminer tout d'abord une solution de (12) sur Q ($t \leq T$), de sorte que nous définirons $w : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Par la suite nous noterons toujours

$$w'(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} w(x, t); \quad \dot{w}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t).$$

Désignons par $H^1(Q)$ l'espace de Sobolev d'ordre 1 i. e.

$$(9) \quad H^1(Q) = \{ w : Q \rightarrow \mathbb{R} \mid w \in L^2(Q), w' \in L^2(Q) \}$$

sur $H^1(Q)$ nous prendrons pour norme

$$\| w \|^2_{H^1} = \| w \|^2_{L^2} + \| w' \|^2_{L^2}$$

où

$$\| w \|^2_{L^2} = \int_0^T \left(\int_{R_1}^{R_2} w^2(x, t) dx \right) dt$$

Nous aurons à considérer par la suite certaines fonctions appartenant à $L^2(I)$; pour f et $g \in L^2(I)$, nous noterons (f, g) le produit scalaire sur $L^2(I)$ et $\| f \|^2$ la norme de f dans cet espace.

c) Espace des fonctions w nulles aux frontieres

Considérons l'espace $H_0^1(Q)$, adhérence de $\mathcal{D}(I)$ dans $H^1(Q)$ où $\mathcal{D}(I)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur I , à support compact. Il est aisé de voir (cf. Lions [12] p. 14) que

$$(10) \quad H_0^1(Q) = \{ w \in H^1(Q) \mid \lim_{r \rightarrow R_1} w(r, t) = \lim_{r \rightarrow R_2} w(r, t) = 0 \}$$

Remarque.

Soit $w \in H^1(Q)$ telle que $w'(r, 0) = 0$; si nous définissons $\hat{f}$ par

$$s \rightarrow \hat{f}(r, t, s) = \begin{cases} w'(r, t-s) & 0 \leq s \leq t \\ 0 & s \geq t \end{cases} \quad (r, t) \in Q$$

alors $\hat{f} \in \mathcal{E}_1$. Il suffit en effet de calculer

$$\begin{aligned} |||\hat{f}|||_{\mathcal{E}_1}^2 &= \bar{\mu}_0 ||\hat{f}(\cdot, \cdot, 0)||_{L^2}^2 + \int_0^{+\infty} ||\hat{f}(\cdot, \cdot, s)||_{L^2}^2 h(s) ds \quad \text{où } H = \mu(\cdot) \in [0, +\infty[\\ &\leq \bar{\mu}_0 ||w'||_{L^2}^2 + \int_0^T h(s) ds ||w'||_{L^2}^2 \leq ||w'||_{L^2}^2 (\bar{\mu}_0 + H) < +\infty \end{aligned}$$

II. 1. 6 "Formule de Taylor" appliquée à $\mathcal{T}$

Hypothèse : nous ferons par la suite l'hypothèse suivante :

La fonctionnelle $\mathcal{T}$ sera définie sur $\mathcal{E}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la restriction de $\mathcal{T}$ à $\mathcal{E}_1$, soit $\mathcal{U}$ donc sera définie sur $\mathcal{E}_1$ à valeurs dans $H^1(Q)$.

Cette dernière hypothèse est liée à la présence, dans l'équation (22) du terme

$$\frac{\partial}{\partial r} \int_{s=0}^{+\infty} \mathcal{U}(r, w'(r, t-s)).$$

D'autre part, nous avons fait précédemment l'hypothèse, qu'en tout point de $\mathcal{E}$, $\mathcal{T}$ admettait une différentielle de Frechet d'ordre un, continue, et bornée sur $\mathcal{E}$.

Nous admettrons ainsi l'existence d'un nombre $M > 0$ tel que :

$$||\mathcal{L}(\cdot; \cdot)|| \leq \frac{M}{2} \quad \text{sur } \mathcal{E}$$

Nous pouvons donc utiliser un résultat d'analyse fonctionnelle (cf. Cartan [13]) et écrire :

$$|\mathcal{T}(g+f) - \mathcal{T}(g)| \leq \frac{M}{2} ||f|| \quad \text{pour } g, g+f \in \mathcal{E}.$$

De cette inégalité il résulte alors que

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(g+f) - \mathcal{T}(g) - \mathcal{L}(g; f)| &\leq |\mathcal{T}(g+f) - \mathcal{T}(g)| + |\mathcal{L}(g; f)| \\ &\leq \frac{M}{2} ||f||_{\mathcal{E}} + \frac{M}{2} ||f||_{\mathcal{E}} = M ||f||_{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

d'où

$$(11) \quad |\mathcal{T}(g+f) - \mathcal{T}(g) - \mathcal{L}(g; f)| \leq M ||f||_{\mathcal{E}}$$

substituons à présent dans (11) g_1 à g , f_1 à f , où g_1 et f_1 sont deux éléments de $\mathcal{E}_1$.

On obtient
$$| \mathcal{U}(g_1 + f_1) - \mathcal{U}(g_1) - \mathcal{L}_1(g_1; f_1) | \leq M \|f_1(x, t, \cdot)\|_{\mathcal{E}_1}$$

d'où l'on déduit

$$| \mathcal{U}(g_1 + f_1) - \mathcal{U}(g_1) - \mathcal{L}_1(g_1, f_1) |^2 \leq M^2 \|f_1(x, t, \cdot)\|^2$$

Intégrons alors cette inégalité entre R_1 et R_2 et 0 et T

$$= \int_0^T \left(\int_{R_1}^{R_2} | \mathcal{U}(g_1 + f_1) - \mathcal{U}(g_1) - \mathcal{L}_1(g_1; f_1) |^2 dt \right) \leq M^2 \|f_1\|^2 \mathcal{E}_1$$

d'où

$$(12) \quad \boxed{\| \mathcal{U}(g_1 + f_1) - \mathcal{U}(g_1) - \mathcal{L}_1(g_1; f_1) \|_{L^2} \leq M \|f_1\|_{\mathcal{E}_1}}$$

Nous utiliserons par la suite cette dernière inégalité.

II 2 EXPOSE DE LA METHODE DE RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE FONCTIONNELLE (I - 22)

$$\frac{\partial}{\partial r} [r^2 \mathcal{T}_{s=0}^{+\infty} (r w' (r, t-s))] = \rho r^3 \frac{\partial w}{\partial t} (r, t)$$

La méthode développée ci-dessous propose une résolution de l'équation (I-22) par approximations successives et consiste à définir une suite de fonctions w_n , $n \in \mathbb{N}$, qui converge vers une solution du problème posé.

Nous construirons chaque élément de la suite à partir du précédent en recherchant $w^n = w_n - w_{n-1}$ comme solution d'une équation différentielle linéaire déduite de (I-22) par substitution de la fonctionnelle $\mathcal{T}$ par sa fonctionnelle linéaire tangente et par addition au second membre d'une fonction déterminée φ^n . Les conditions initiale et aux limites vérifiées par w_n seront toujours imposées par (23) et (24).

La fonction φ^n ainsi introduite jouera le rôle de terme correctif et imposera à la limite w (sous réserve de convergence) d'être solution du problème étudié.

Nous allons à présent détailler la construction de cette suite (w_n) .

Plaçons nous tout d'abord au voisinage de $f(\cdot)$ telle que $f(s) = 0$, pour tout $s \in [0, +\infty[$ et définissons $f^0(\cdot)$ que nous supposerons appartenir à $\mathcal{E}_1$ par

$$(13) \quad f^0(s) = \begin{cases} r w^{0'}(r, t-s) & 0 \leq s \leq t \\ r w'_0(r, t-s) & s > t \end{cases}$$

où w_0 est définie par (I-24) et w^0 par la solution de l'équation différentielle linéaire

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \mathcal{L}_1(0; f^0)] = \rho r^3 w^0(r, t)$$

qui vérifie les conditions aux limites

$$(15) \quad w^0(R_1, t) = \Omega_1(t), \quad w^0(R_2, t) = \Omega_2(t) \quad t > 0$$

et la condition initiale

$$(16) \quad w^0(r, t) = w_0(r, t), \quad t \leq 0, \quad r \in [R_1, R_2]. \quad w^0$$

vérifie donc l'ensemble des conditions initiale et aux limites imposées à w , mais une équation différentielle fonctionnelle différente, obtenue en approchant $\mathcal{T}$, au voisinage de $f(\cdot) \equiv 0$ par sa fonctionnelle linéaire tangente ($\mathcal{T}(0) = 0$ puisque $\mathcal{T}$ est une fonctionnelle impaire).

Or nous avons signalé que

$$\mathcal{L}_1(0; f^0) = \bar{\mu}_{(0)} r w^{0'}(r, t) + \int_0^{+\infty} K_{(0)}(s) r w^{0'}(r, t-s) ds$$

Nous pouvons donc expliciter l'équation (14) et l'écrire

$$(17) \quad \rho r^3 \dot{w}^0(r, t) = \bar{\mu}_{(0)} \frac{\partial}{\partial r} [r^3 w^{0'}(r, t)] + \frac{\partial}{\partial r} [r^3 \int_0^{+\infty} K_{(0)}(s) w^{0'}(r, t-s) ds]$$

Nous étudierons cette équation dans la 3^{ème} partie de ce chapitre et nous montrerons que l'équation (17), jointe aux conditions (15) et (16) possède une (solution unique) telle que $f^0(.) \in \mathcal{E}_1$.

Considérons alors

$$w_1(r, t) = w^0(r, t) + w^1(r, t) \text{ et les fonctions } f \text{ associées}$$

$$f_1(s) = f^0(s) + f^1(s) = f_0(s) + f^1(s)$$

$$\text{avec } f^1(s) = \begin{cases} r w^{1'}(r, t-s) & 0 \leq s \leq t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

w^1 étant définie comme suit :

$$\mathcal{U}(f_1) = \mathcal{U}(f_0 + f^1) = \mathcal{U}(f_0) + \mathcal{L}_1(f_0; f^1) + o(\|f^1\|_{\mathcal{E}})$$

Cherchons alors w^1 , solution de

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \mathcal{L}_1(f_0; f^1)] = \rho r^3 \dot{w}^1(r, t) + \varphi^0(r, t)$$

avec

$$\varphi^0(r, t) = \rho r^3 \dot{w}^0(r, t) - \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \int_{s=0}^{+\infty} \mathcal{U}(r w^{0'}(r, t-s))]$$

w^1 , vérifiant les conditions

$$(19) \quad \begin{cases} w^1(R_1, t) = w^1(R_2, t) = 0 & t > 0 \\ w^1(r, t) = 0 & t \leq 0, \quad r \in [R_1, R_2] \end{cases}$$

On peut remarquer que l'équation (18) se déduit de (I-22) en remplaçant w par w_1 et $\mathcal{U}(f)$ par $\mathcal{U}(f_0) + \mathcal{L}_1(f_0; f^1)$.

Nous étudierons également ce problème dans la 3^{ème} partie de ce chapitre et nous établirons un ensemble de conditions qui assure l'existence de w^1 telle que $f^1 \in \mathcal{E}_1$.

Nous pouvons remarquer que cette étude est équivalente à celle de

$$\frac{\partial}{\partial r} [r^3 u_{f_0} w^{1'}(r, t)] + \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \int_0^{+\infty} K_{f_0}(s) w^{1'}(r, t-s) ds] = \rho r^3 \dot{w}^1(r, t) + \varphi^0(r, t)$$

qui représente l'équation (18) dans laquelle on a remplacé $\mathfrak{L}_1(f_0; f^1)$ par son expression en fonction du produit scalaire sur $\mathfrak{L}_1$. Supposons ce problème résolu. Nous itérons alors le procédé en construisant w_n telle que

$$w_n(r, t) = w_{n-1}(r, t) + w^n(r, t)$$

w^n vérifiant l'équation

$$(20) \quad \frac{\partial}{\partial r} [r^3 u_{n-1}^* w^n(r, t)] + \frac{\partial}{\partial r} [r^3 \int_0^{+\infty} K_{n-1}(s) w^n(r, t-s) ds] = \rho r^3 \dot{w}^n(r, t) + \varphi^{n-1}(r, t)$$

$$\text{où} \quad \begin{cases} u_{n-1}^*(r, t) = u_{f_{n-1}}^*(r, t) \\ K_{n-1}(s) = K_{f_{n-1}}(s) \\ \varphi^{n-1}(r, t) = \rho r^3 \dot{w}_{n-1}(r, t) - \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \int_0^{+\infty} \mathfrak{L}(r w'_{n-1}(r, t-s))]. \end{cases}$$

et pour conditions initiale et aux limites :

$$(21) \quad \begin{cases} w^n(R_1, t) = w^n(R_2, t) = 0 & t > 0 \\ w^n(r, t) = 0 & t \leq 0, \quad r \in [R_1, R_2]. \end{cases}$$

Ce problème est semblable en tout point au précédent.

Après avoir défini w_n , nous montrerons, que sous certaines conditions portant sur la fonction $\mathcal{T}$ (ou la fonctionnelle linéaire tangente $\mathfrak{L}$), la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $H^1(Q)$ vers une fonction $w \in H^1(Q)$. Nous verrons ensuite comment on peut effectuer le passage à la limite sur les différents termes de (20) et déduire ainsi l'existence d'une solution (faible) de l'équation (I-22) sous les conditions (I-23) et (I-24).

II 3 ETUDE DE L'ÉCOULEMENT VISCOELASTIQUE LINEAIRE ASSOCIE A LA FONCTIONNELLE TANGENTE EN 0

Dans l'exposé de la méthode de résolution de l'équation différentielle fonctionnelle I-(22), le point de départ est la recherche de la solution de l'équation

$$(1) \quad \mu_{(0)} \frac{\partial}{\partial r} [r^3 w^{(0)}(r, t)] + \frac{\partial}{\partial r} [r^3 \int_0^{+\infty} K_{(0)}(s) w^{(0)}(r, t-s) ds] = \rho r^3 \dot{w}^{(0)}(r, t)$$

qui vérifie les conditions

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} w^{(0)}(R_1, t) = \Omega_1(t) \\ w^{(0)}(R_2, t) = \Omega_2(t) \end{array} \right\} \quad t > 0 \quad ; \quad w^{(0)}(r, t) = w_0(r, t) \quad t \leq 0, \quad r \in [R_1, R_2]$$

Rappelons que cette équation est obtenue en approchant la fonctionnelle $\mathcal{F}$, par une fonctionnelle linéaire tangente au voisinage de $f(s) \equiv 0$. Nous allons à présent montrer comment cette étude peut être englobée dans le cadre plus général de l'existence d'une solution de l'équation

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial r} [\mu_{(0)}(r, t) r^3 w'(r, t)] + \frac{\partial}{\partial r} [r^3 \int_0^t K_{(0)}(r, s, t) w'(r, t-s) ds] = \rho r^3 \dot{w}(r, t) + \varphi(r, t)$$

qui vérifie

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(R_1, t) = 0 \\ w(R_2, t) = 0 \end{array} \right. \quad t > 0 \quad \text{et} \quad w(r, t) = 0, \quad t \leq 0 \quad \text{et} \quad r \in [R_1, R_2]$$

L'intérêt qu'il y a à considérer le problème (1) comme cas particulier du problème (3) réside dans le fait que nous aurons à nous préoccuper par la suite de l'existence de fonctions w^n , définies dans II-(20), qui sont solutions d'équations du type (3) avec les mêmes conditions initiale et aux limites (4). On pourra ainsi regrouper ces diverses études en une seule.

Pour montrer que (1) est un cas particulier de (2), définissons à partir de $w^{(0)}$, la fonction

$$(5) \quad \tilde{w}^{(0)}(r, t) = w^{(0)}(r, t) - r \left[\frac{\Omega_1(t) - \Omega_2(t)}{R_1 - R_2} \right] + \frac{\Omega_1(t) R_2 - \Omega_2(t) R_1}{R_1 - R_2}$$

Il est clair que

$$\begin{cases} \bar{w}^0(R_1, t) = 0 \\ \bar{w}^0(R_2, t) = 0 \end{cases} \quad t > 0$$

D'autre part remarquons que

$$\int_0^{+\infty} K_{(0)}(s) w^{0'}(r, t-s) ds = \int_0^t K_{(0)}(s) w^{0'}(r, t-s) ds + \int_t^{+\infty} K_{(0)}(s) w^{0'}(r, t-s) ds$$

or si $s \in [t, +\infty[$ $t-s \leq 0$ et $w^0(r, t-s) = w_0(r, t-s)$ d'après (2)

d'où

$$\int_0^{+\infty} K_{(0)}(s) \bar{w}^{0'}(r, t-s) ds = \int_0^t K_{(0)}(s) w^{0'}(r, t-s) ds + \int_t^{+\infty} K_{(0)}(s) w_0(r, t-s) ds$$

(1) peut donc s'écrire sous forme équivalente

$$(6) \quad \mu_{(0)} [r^3 w^{0'}(r, t)]' + [r^3 \int_0^t K_{(0)}(s) w^{0'}(r, t-s) ds]' = \rho r^3 w^0(r, t) + \varphi_1(r, t)$$

$$\varphi_1(r, t) = - [r^3 \int_t^{+\infty} K_{(0)}(s) w_0'(r, t-s) ds]'$$

A partir de la relation (6) et la définition de $\bar{w}^0$, nous pourrions chercher l'équation vérifiée par $\bar{w}^0$.

Un calcul élémentaire montre que $\bar{w}^0$ est la solution de

$$(7) \quad \mu_0 [r^3 \bar{w}^{0'}]' + [r^3 \int_0^t K_{(0)}(s) \bar{w}^{0'}(r, t-s) ds]' = \rho r^3 \bar{w}^0(r, t) + \varphi(r, t)$$

où

$$(8) \quad \varphi(r, t) = \varphi_1(r, t) - \frac{3r^2 \mu_{(0)}}{R_1 - R_2} [\dot{\Omega}_1(t) - \dot{\Omega}_2(t)] - \frac{3r^2}{R_1 - R_2} \int_0^t K_{(0)}(s) [\dot{\Omega}_1(t-s) - \dot{\Omega}_2(t-s)] ds + \frac{\rho r^4}{R_1 - R_2} [\dot{\Omega}_1(t) - \dot{\Omega}_2(t)] + \frac{\rho r^3}{R_1 - R_2} [\dot{\Omega}_2(t) R_1 - \dot{\Omega}_1(t) R_2]$$

Il en résulte ainsi, que si l'on pose

$$w(r, t) = \begin{cases} \bar{w}^0(r, t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

w est solution, pour $t > 0$, d'une équation du type (3) et satisfait aux conditions (4). La détermination de $\bar{w}^0(r, t)$ pour $t > 0$, entraîne évidemment celle de $w^0(r, t)$, de sorte qu'il est effectivement possible de ramener le problème (1) à un problème de type (3).

Nous allons à présent replacer l'étude de w^n , définie dans II-(20) dans le même cadre que celle nécessitée par (3).

II 4 EQUATIONS LINEAIRES ASSOCIEES AU PROBLEME ET A LA FONCTIONNELLE LINEAIRE TANGENTE

Nous allons montrer dans cette partie, comment les fonctions ω^n définies dans II-(20), apparaissent également comme solutions de problèmes du type (II) - (3) - (3).

Rappelons que dans la partie II-(2), nous avons montré qu'après l'étude de l'équation linéaire associée à la fonctionnelle linéaire tangente en 0, nous avons à nous préoccuper de l'existence d'une solution de

$$(1) \quad [r^3 \mu_{n-1}^*(r, t) \omega^{n-1}(r, t)]' + [r^3 \int_0^{+\infty} K_{n-1}(s) \omega^{n-1}(r, t-s) ds]' = \rho r^3 \dot{\omega}^n(r, t) + \varphi^{n-1}(r, t)$$

où

$$\varphi^{n-1}(r, t) = \rho r^3 \dot{\omega}_{n-1}(r, t) - [r^2 \frac{+\infty}{s=0} (r \omega'_{n-1}(r, t-s))]'$$

et

$$\begin{cases} \omega^n(R_1, t) = \omega^n(R_2, t) = 0 & t > 0 \\ \omega^n(r, t) = 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad r \in [R_1, R_2]$$

Par l'hypothèse $\omega^n(r, t) = 0$ pour $t \leq 0$, d'où

$$\int_0^{+\infty} K_{n-1}(s) \omega^{n-1}(r, t-s) ds = \int_0^t K_{n-1}(s) \omega^{n-1}(r, t-s) ds = \int_0^t K_{n-1}(t-s) \omega^{n-1}(r, s) ds$$

de sorte qu'après substitution de cette valeur de l'intégrale dans l'équation (1) nous retrouvons une équation du type III - (3) - (3). Signalons toutefois deux différences assez sensibles entre les problèmes liés à ω^n , $n \geq 1$ et celui lié à ω^0 .

D'une part, pour $n \geq 1$, le coefficient de viscosité instantanée μ_{n-1} est fonction des coordonnées d'espace (et du temps) alors que dans l'équation vérifiée par ω^0 , il s'agissait d'un scalaire.

D'autre part, le noyau de l'intégrale, soit K_{n-1} , est également fonction de r et t par l'intermédiaire de f_{n-1} .

Pour ne pas oublier ces faits par la suite, nous noterons

$$\begin{cases} K_{n-1}(s) = K_{n-1}(r, s, t) \\ \mu_{n-1} = \mu_{n-1}(r, t) \end{cases}$$

Nous allons donc nous consacrer à présent à l'étude de l'équation II - (3) (3).

II 5 EXISTENCE D'UNE SOLUTION DE

$$(1) \quad \begin{aligned} & [\mu(r, t) r^3 \omega'(r, t)]' + [r^3 \int_0^t K(r, s, t) \omega'(r, t-s) ds]' = 0 r^3 \ddot{\omega}(r, t) + \varphi(r, t) \\ & \omega(R_1, t) = \omega(R_2, t) = 0, \quad t > 0 \\ & \omega(r, t) = 0 \quad t \leq 0 \quad \text{et } r \in [R_1, R_2] \end{aligned}$$

II. 5.1 Préliminaires - Inégalités de l'énergie

Dans l'équation (1) le terme

$$\mu(r, t) r^3 \omega'(r, t) + r^3 \int_0^t K(r, s, t) \omega'(r, t-s) ds$$

représente à un coefficient 2π près, le couple s'exerçant sur un cylindre de rayon r , $R_1 \leq r \leq R_2$, et de hauteur unité, couple dû aux frottements d'origine visqueuse.

Il en résulte que

$$[\mu(r, t) r^3 \omega'(r, t) + r^3 \int_0^t K(r, s, t) \omega'(r, t-s) ds] r \omega'(r, t) \text{ correspond, à}$$

l'instant t , à l'énergie dissipée par frottement interne de ce cylindre sur le reste du milieu. Bien qu'il semble physiquement évident que la quantité totale d'énergie dissipée par frottement interne depuis l'instant initial, jusqu'à l'instant t , soit une quantité positive, cette inégalité n'apparaît pas naturellement du point de vue mathématique.

Ceci est dû à la présence du terme $\int_0^t K(r, s, t) \omega'(r, t-s) ds$, qui tient compte du passé cinématique du matériau.

Nous allons montrer que sous certaines conditions portant sur la fonction d'influence K , l'apport d'énergie dû à ce terme, entre les instants 0 et t , soit

$$\int_0^t \left(\int_0^z K(r, s, z) \omega'(r, z-s) ds \right) \omega'(r, z) dz \text{ est positif ou nul.}$$

Ces conditions, sont "physiquement raisonnables", puisque comme nous le verrons, elles correspondent à l'idée qui est à la base même du principe de mémoire évanescence.

En dehors de l'intérêt physique d'une telle inégalité, nous verrons également par la suite, qu'elle est liée à l'existence même d'une solution de l'équation (1).

Pour une meilleure compréhension de la démonstration de ce résultat, nous avons préféré scinder celle-ci en deux, suivant que K est, ou non, fonction de la variable t .

Ceci correspond également au fait, qu'au voisinage de la fonction 0, le noyau de la fonctionnelle linéaire tangente, $K_{(0)}$, ne dépend que de la variable $s \in [0, T]$.

Lemme 1 Première inégalité de l'énergie dissipée par frottement interne

Pour toute fonction $s \rightarrow k(s)$, définie sur $I = [0, T]$, positive et continûment dérivable sur I , telle que

$s \rightarrow k'(s)$ soit négative, croissante sur $[0, T]$ et pour toute fonction $u \in L^2([0, T])$

$$I = \int_0^T \left(\int_0^t k(s) u(t-s) ds \right) u(t) dt \geq 0$$

Démonstration

la démonstration s'appuie sur la relation suivante :

a) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int_0^T \left(\int_0^t \cos \lambda s u(t-s) ds \right) u(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^T \cos \lambda s u(T-s) ds \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^T \sin \lambda s u(T-s) ds \right)^2 \geq 0$$

Pour démontrer cette inégalité, remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \cos \lambda s u(t-s) ds \right)^2 &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds \right)^2 \\ &= 2 \int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds \left[u(t) - \lambda \int_0^t \sin (\lambda (t-s)) u(s) ds \right] \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left(\int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds \right) u(t) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds \right)^2 + \\ &\quad \left(\lambda \int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds \right) \times \int_0^t \sin (\lambda (t-s)) u(s) ds \end{aligned}$$

or

$$\lambda \int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds = \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \sin (\lambda (t-s)) u(s) ds \right)$$

On a donc

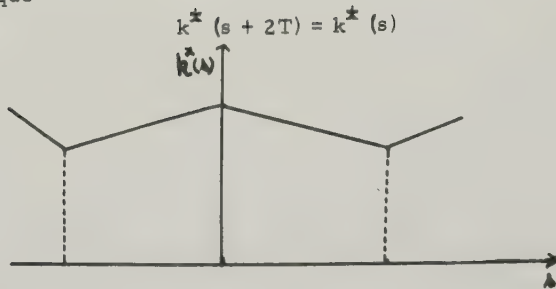
$$\left(\int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds \right) u(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \sin (\lambda (t-s)) u(s) ds \right)^2$$

$$\int_0^T \left(\int_0^t \cos (\lambda (t-s)) u(s) ds \right) u(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^T \cos (\lambda (T-s)) u(s) ds \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^T \sin (\lambda (T-s)) u(s) ds \right)^2$$

Cette relation nous servira par la suite. A présent, définissons la fonction

$$s \rightarrow k^*(s) = \begin{cases} k(s) & s \in [0, T] \\ k(-s) & s \in [-T, 0] \end{cases}$$

et telle que



Soit $a_0^* + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^* \cos n \frac{\pi}{T} s$, la série de Fourier associée à la fonction paire $k^*(.)$, c'est-à-dire telle que

$$a_0^* = \frac{1}{T} \int_0^T k^*(s) ds = \frac{1}{T} \int_0^T k(s) ds$$

$$a_n^* = \frac{2}{T} \int_0^T k^*(s) \cos \frac{n\pi}{T} s ds = \frac{2}{T} \int_0^T k(s) \cos \frac{n\pi}{T} s ds$$

b) Nous allons démontrer que sans les hypothèses du lemme 1.

$$a_0^* \geq 0 \text{ et pour tout } n \geq 1 \quad 0 \leq a_n^* \leq 4 \frac{|k'(0)|}{n^2} \frac{T}{\pi^2}$$

Démonstration.

Puisque $s \rightarrow k(s)$ est supposée dérivable sur $[0, T]$, pour tout $n \geq 1$,

$$\text{on a } a_n^* = -\frac{2}{n\pi} \int_0^T k'(s) \sin \frac{n\pi}{T} s ds$$

$$\text{d'autre part } \int_0^T k'(s) \sin \frac{n\pi}{T} s ds = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\int_{\frac{pT}{n}}^{\frac{(p+1)T}{n}} k'(s) \sin \frac{n\pi}{T} s ds \right)$$

Or si $s \in [0, \frac{T}{n}]$ $k'(0) \leq k'(s) \leq k'(\frac{T}{n})$ puisque $k'(.)$ est supposée croissante, de sorte que

$$\frac{2T}{n\pi} k'(0) \leq \int_0^{\frac{T}{n}} k'(s) \sin \frac{n\pi}{T} s ds \leq \frac{2T}{n\pi} k'(\frac{T}{n})$$

De même

$$\text{si } s \in \left[\frac{T}{n}, \frac{2T}{n} \right]$$

$$-\frac{2T}{n\pi} k' \left(\frac{2T}{n} \right) \leq \int_{\frac{T}{n}}^{\frac{2T}{n}} k'(s) \sin \frac{n\pi}{T} s \, ds \leq -\frac{2T}{n\pi} k' \left(\frac{T}{n} \right)$$

alors que si

$$s \in \left[\frac{2T}{n}, \frac{3T}{n} \right]$$

$$\frac{2T}{n\pi} k' \left(\frac{2T}{n} \right) \leq \int_{\frac{2T}{n}}^{\frac{3T}{n}} k'(s) \sin \frac{n\pi}{T} s \, ds \leq \frac{2T}{n\pi} k' \left(\frac{3T}{n} \right)$$

On peut ainsi donner un minorant et un majorant de l'intégrale sur chaque intervalle $\left[p \frac{T}{n}, (p+1) \frac{T}{n} \right]$. Nous regrouperons les résultats en disant que si $n = 2m$, la somme des diverses inégalités précédentes conduit à

$$\frac{2T}{n\pi} k'(0) - \frac{2T}{n\pi} k'(T) \leq \int_0^T k'(s) \sin \frac{n\pi}{T} s \, ds \leq 0$$

d'où

$$0 \leq a_n^* \leq \frac{-4T}{n^2 \pi^2} k'(0) + \frac{4T}{n^2 \pi^2} k'(T) \leq \frac{4T}{n^2 \pi^2} |k'(0)|$$

si $n = 2m+1$

$$\frac{2T}{n\pi} k'(0) \leq \int_0^T k'(s) \sin \frac{n\pi}{T} s \, ds \leq \frac{2T}{n\pi} k'(T)$$

d'où

$$0 \leq \frac{-4T}{n^2 \pi^2} k'(T) \leq a_n^* \leq \frac{+4T}{n^2 \pi^2} |k'(0)|$$

c'est-à-dire la même double inégalité que précédemment.

Enfin pour $n = 0$, la fonction $k(\cdot)$ étant continue positive sur $[0, T]$

$$0 \leq a_0^* \leq A$$

c) Sous les hypothèses du lemme 1, la fonction $s \rightarrow k(s)$ est continûment dérivable sur $[0, T]$; $s \rightarrow k'(s)$ est donc bornée sur ce compact. En particulier $|k'(0)| \leq M^*$, de sorte que

$$0 \leq a_n^* \leq \frac{4M^*T}{n^2 \pi^2}$$

Cette dernière inégalité montre que la série de Fourier de $k^*(.)$ converge uniformément sur $[-T, T]$ et donc que pour tout $s \in [0, T]$

$$k(s) = a_0^* + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^* \cos \frac{n\pi}{T} s$$

Utilisons maintenant le fait que si $u \in L^2([0, T])$, u est, sauf sur un ensemble éventuel de mesure nulle, borné sur $[0, T]$.

Il en résulte en particulier que $s \rightarrow k(s) u(t-s)$ est intégrale sur $[0, T]$; d'autre part, la convergence uniforme de la série de Fourier de f sur $[0, T]$ permet d'écrire

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T \left(\int_0^t k(s) u(t-s) ds \right) u(t) dt \\ &= a_0^* \int_0^T \left(\int_0^t u(t-s) ds \right) u(t) dt + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^* \left(\int_0^T \left(\int_0^t \cos \frac{n\pi}{T} s u(t-s) ds \right) u(t) dt \right) \end{aligned}$$

Enfin, d'après les inégalités

$$\begin{cases} \int_0^T \left(\int_0^t u(t-s) ds \right) u(t) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^T u(s) ds \right)^2 \geq 0 \\ \int_0^T \left(\int_0^t \cos \frac{n\pi}{T} s u(t-s) ds \right) u(t) dt \geq 0 \\ a_n^* \geq 0 \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Il en résulte que $J \geq 0$. c. q. f. d.

Lemme 2 Seconde inégalité de l'énergie dissipée par frottement interne

Pour toute fonction $(s, t) \rightarrow k(s, t)$ définie sur $[0, T] \times [0, T]$ telle que

$$s \rightarrow k(s, t)$$

et

$$s \rightarrow -\dot{k}(s, t) = -\frac{\partial k}{\partial t}(s, t) \quad (t \text{ fixé } \in [0, T])$$

vérifient les hypothèses du lemme 1, et pour toute fonction $u \in L^2([0, T])$

$$I = \int_0^T \left(\int_0^t k(s, t) u(t-s) ds \right) u(t) dt \geq 0$$

Démonstration

Nous allons démontrer que sous les hypothèses du Lemme 2

$$I = \int_0^T \left(\int_0^t k(s, T) u(t-s) ds \right) u(t) dt - \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_0^\xi \dot{k}(s, t) u(\xi-s) ds \right) u(\xi) d\xi \right) dt$$

Pour cela remarquons que

$$\int_0^T \left(\int_0^t k(s, t) u(t-s) ds \right) u(t) dt = \int_0^T \left(\int_s^T k(s, t) u(t-s) u(t) dt \right) ds$$

Cette seconde intégrale peut se calculer en intégrant par parties ; et

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_s^T k(s, t) u(t-s) u(t) dt \right) ds &= \int_0^T k(s, T) \left(\int_s^T u(\xi-s) u(\xi) d\xi \right) ds \\ &\quad - \int_0^T \left(\int_s^T \dot{k}(s, t) \left(\int_s^t u(\xi-s) u(\xi) d\xi \right) dt \right) ds \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } I_1 &= \int_0^T k(s, T) \left(\int_s^T u(\xi-s) u(\xi) d\xi \right) ds = \int_0^T \left(\int_s^T k(s, T) u(\xi-s) u(\xi) d\xi \right) ds \\ &= \int_0^T \left(\int_0^t k(s, T) u(t-s) ds \right) u(t) dt \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^T \left(\int_s^T \dot{k}(s, t) \left(\int_s^t u(\xi-s) u(\xi) d\xi \right) dt \right) ds \\ &= - \int_0^T \left(\int_0^t \dot{k}(s, t) \left(\int_s^t u(\xi-s) u(\xi) d\xi \right) ds \right) dt \\ &= - \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_0^\xi \dot{k}(s, t) u(\xi-s) u(\xi) ds \right) d\xi \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_0^\xi -\dot{k}(s, t) u(\xi-s) ds \right) u(\xi) d\xi \right) dt \end{aligned}$$

or si la fonction $s \rightarrow k(s, T)$ vérifie les hypothèses du lemme 1

$$I_1 = \int_0^T \left(\int_0^t k(s, T) u(t-s) ds \right) u(t) dt \geq 0$$

et si la fonction $s \rightarrow -\dot{k}(s, t)$ vérifie les mêmes hypothèses

$$\int_0^t \left(\int_0^\xi -\dot{k}(s, t) u(\xi-s) ds \right) u(\xi) d\xi \geq 0$$

soit

$$I_2 = \int_0^T \left(\int_0^t \left(\int_0^\xi -\dot{k}(s, t) u(\xi-s) ds \right) u(\xi) d\xi \right) dt \geq 0.$$

Il en résulte que $I = I_1 + I_2 \geq 0$ c. q. f. d.

II. 5. 2 Existence d'une solution de II. 5. 1

Nous allons démontrer l'existence d'une solution de l'équation II. 5. 1 soit

$$[\mu(r, t) r^3 \omega'(r, t)]' + [r^3 \int_0^t K(r, s, t) \omega'(r, t-s) ds]' = \rho r^3 \dot{\omega}(r, t) + \varphi(r, t)$$

$$\begin{cases} \omega(R_1, t) = \omega(R_2, t) = 0, & t > 0 \\ \omega(r, t) = 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

en utilisant un théorème de J. L. Lions ([12] p. 36-39)

Notations

Nous désignerons par la suite par

$$\mathfrak{L} = L^2(I) \text{ où } I =]R_1, R_2[; \quad L^2 = L^2(Q) \text{ où}$$

$$Q =]R_1, R_2[\times]0, T[$$

$$\mathcal{V} = H_0^1(I)$$

$$F = L^2(0, T; \mathcal{V}) = H_0^1(Q)$$

$$\mathfrak{F} = \{ \varphi : Q \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \in H_0^1(Q); \dot{\varphi} \in L^2(Q); \varphi(T) = 0 \}.$$

Nous noterons par la suite, chaque fois qu'il n'y aura pas possibilité d'ambiguïté, $t \rightarrow u(t)$ un élément de F .

Nous munirons $\mathfrak{F}$ de la norme

$$|||\varphi||| = \|\varphi\|_F^2 + \|\varphi(0)\|_{\mathfrak{L}}^2 \quad \text{où } \varphi(0) = \varphi(r, 0)$$

Forme bilinéaire associée à l'équation (1).

Considérons la forme bilinéaire définie sur $F \times F$ par

$$\begin{aligned} a(t; u(t), v(t)) = & \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^t r^3 K_1(r, s, t) u'(r, t-s) ds \right) v'(r, t) dr \\ & + \int_{R_1}^{R_2} r^3 \mu(r, t) u'(r, t) v'(r, t) dr + \lambda \int_{R_1}^{R_2} r^3 u(r, t) v(r, t) dr \end{aligned}$$

où K_1 est défini par

$$K_1(r, s, t) = e^{-\frac{\lambda}{\rho}s} K(r, s, t)$$

λ étant un nombre réel positif donné arbitrairement.

Nous introduirons également la forme sesquilinéaire sur $F \times \mathfrak{F}$.

$$(2) \quad E(u, \varphi) = \int_0^T \{ a(t; u(t), \varphi(t)) - \rho (r^3 u(t), \dot{\varphi}(t))_{\mathfrak{L}} \} dt$$

Enfin nous définirons L , forme linéaire sur $\mathfrak{F}$

$$(3) \quad L(\varphi) = \int_0^T (f_1(t), \varphi(t))_{\mathfrak{L}} dt \text{ où } f_1 \text{ est une fonction donnée dans } L^2(Q)$$

le théorème que nous allons utiliser est le suivant

si pour tout $\varphi \in \Phi$ $u \rightarrow E(u, \varphi)$ est continue sur F , s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$E(\varphi, \varphi) \geq \alpha |||\varphi|||^2 \text{ pour tout } \varphi \in \Phi$$

et si $\varphi \rightarrow L(\varphi)$ est continue sur Φ alors il existe $u \in F$ telle que

$$E(u, \varphi) = L(\varphi) \text{ pour tout } \varphi \in \Phi$$

l'hypothèse de continuité de $u \rightarrow E(u, \varphi)$ sur F résulte de la définition même de $E(u, \varphi)$ et de F .

Evaluons à présent $E(\varphi, \varphi)$

$$E(\varphi, \varphi) = \int_0^T \{ a(t; \varphi(t), \varphi(t)) - \rho(r^3 \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \}_{\mathcal{L}} dt$$

$$\begin{aligned} \text{avec } a(t; \varphi(t), \varphi(t)) &= \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^t r^3 K_1(r, s, t) \varphi'(r, t-s) ds \right) \varphi'(r, t) dr \\ &+ \int_{R_1}^{R_2} r^3 \mu(r, t) \varphi'^2(r, t) dr + \lambda \int_{R_1}^{R_2} r^3 \varphi^2(r, t) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \int_0^T &\left(\int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^t r^3 K_1(r, s, t) \varphi'(r, t-s) ds \right) \varphi'(r, t) dr \right) dt \\ &= \int_{R_1}^{R_2} r^3 \left(\int_0^T \left(\int_0^t K_1(r, s, t) \varphi'(r, t-s) ds \right) \varphi'(r, t) dt \right) dr \end{aligned}$$

compte tenu du théorème de Fubini.

Or sous les hypothèses du lemme 2

$$\int_0^T \left(\int_0^t K_1(r, s, t) \varphi'(r, t-s) ds \right) \varphi'(r, t) dt \geq 0$$

puisque $\varphi(r, \cdot) \in L^2([0, T])$ pour presque tout $r \in]R_1, R_2[$

Il en résulte que

$$\int_{R_1}^{R_2} r^3 \left(\int_0^T \left(\int_0^t K_1(r, s, t) \varphi'(r, t-s) ds \right) \varphi'(r, t) dt \right) dr \geq 0$$

d'où

$$\begin{aligned} E(\varphi, \varphi) &\geq \int_0^T \left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 \mu(r, t) \varphi'^2(r, t) dr \right) dt + \lambda \int_0^T \left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 \varphi^2(r, t) dr \right) dt \\ &- \rho \int_0^T \left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 \varphi(r, t) \dot{\varphi}(r, t) dr \right) dt \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^T \left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 \varphi(x, t) \dot{\varphi}(x, t) dx \right) dt = \int_{R_1}^{R_2} r^3 \left(\int_0^T \varphi(x, t) \dot{\varphi}(x, t) dt \right) dx = - \frac{1}{2} \int_{R_1}^{R_2} r^3 \varphi(x, 0)^2 dx$$

d'où il résulte que

$$-\rho \int_0^T \left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 \varphi(x, t) \dot{\varphi}(x, t) dx \right) dt \geq \rho \frac{R_1^3}{2} \|\varphi(0)\|_{\mathfrak{L}}^2$$

D'autre part $\mu(\cdot, \cdot)$ représente le coefficient de viscosité locale instantanée dans cet écoulement caractérisé par ω . Il est donc naturel de le supposer positif.

Nous ferons de plus l'hypothèse qu'il existe un nombre $\mu_0 > 0$ tel que pour tout $(x, t) \in Q$ $\mu(x, t) \geq \mu_0$.

De ces diverses inégalités il résulte alors que

$$E(\varphi, \dot{\varphi}) \geq \mu_0 R_1^3 \|\varphi\|_{L^2}^2 + \rho \frac{R_1^3}{2} \|\varphi(0)\|_{\mathfrak{L}}^2 + \lambda R_1^3 \|\varphi\|_{L^2}^2$$

soit

$$(4) \quad E(\varphi, \dot{\varphi}) \geq \inf \left(\mu_0 R_1^3, \rho \frac{R_1^3}{2}, \lambda R_1^3 \right) \|\varphi\|_{L^2}^2$$

D'autre part, $\varphi \rightarrow L(\varphi)$ est continue sur $\mathfrak{H}$ pour la norme $\|\varphi\|_{\mathfrak{H}}$, ceci résulte en effet de l'inégalité

$$|L(\varphi_1) - L(\varphi_2)| \leq \|f_1\|_{L^2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathfrak{H}} \quad (f_1 \in L^2(Q))$$

si l'on applique le théorème de J. L. Lions ([12] p. 65-68) précédemment cité, on déduit alors de ces diverses conditions :

Proposition 1 :

Etant donné $f_1 \in L^2(Q)$ il existe $u \in H_0^1(Q)$ tel que

$$\int_0^T \{ a(t; u(t), \varphi(t)) - \rho (r^3 u(t); \dot{\varphi}(t))_{\mathfrak{L}} \} dt = \int_0^T (f_1(t), \varphi(t))_{\mathfrak{L}} dt$$

pour toute fonction φ , vérifiant

$$\varphi \in H_0^1(Q), \quad \dot{\varphi} \in L^2(Q), \quad \varphi(T) = 0.$$

Ce résultat permet ainsi d'affirmer l'existence d'une solution (faible) de l'équation

$$[r^3 \mu(r, t) u'(r, t)]' + [r^3 \int_0^t K_1(r, s, t) u'(r, t-s) ds]' + \lambda r^3 u(r, t) = \rho r^3 \dot{u}(r, t) + f_1(r, t)$$

où $f_1 \in L^2(Q)$ et λ arbitraire dans $\mathbb{R}^+$.

Mais alors, comme on le vérifie aisément

$w(r, t) = e^{-\frac{\lambda t}{\rho}} u(r, t)$ est solution (faible) de l'équation II. 5. 1 avec

$$\begin{cases} f(r, t) = e^{-\frac{\lambda t}{\rho}} f_1(r, t) \\ K(r, s, t) = e^{-\frac{\lambda s}{\rho}} K_1(r, s, t) \end{cases}$$

La proposition (1) conduit donc à l'existence d'une solution (faible) de II. 5. 1 pour $f \in L^2(Q)$.

Il est très important pour la suite de cette étude de posséder des renseignements supplémentaires sur la solution w , en particulier sur la nature de la fonction (ou distribution) $\dot{w}$.

Nous allons à présent montrer qu'à l'aide de deux hypothèses précisant $\mu(., .)$ et $K_1(., ., .)$, nous pourrions situer $\dot{w}$ dans $L^2(Q)$.

Complément sur la régularité

Proposition 2

si la fonction $t \rightarrow \mu(r, t)$ est continûment différentiable sur $[0, T]$, pour tout $r \in [R_1, R_2]$ et si la fonction

$s \rightarrow -\frac{\partial K}{\partial s}(r, s, t)$ vérifie les hypothèses du lemme 1 pour $(r, t) \in Q$

alors étant donné $f \in L^2(Q)$, il existe une solution $w \in H_0^1(Q)$, $\dot{w} \in L^2(Q)$ et telle que l'équation

$$[r^3 \mu(r, t) w'(r, t)]' + [r^3 \int_0^t K(r, s, t) w'(r, t-s) ds]' = \rho r^3 \dot{w}(r, t) + f(r, t)$$

soit vérifiée pour presque tout $t \in [0, T]$.

Démonstration

La démonstration de cette proposition est basée sur une idée de J. L. Lions ([12], p. 65-68).

La différence essentielle, et qui nous oblige à donner ici une démonstration complète réside dans le fait que la forme $a(t; u(t), v(t))$, introduite précédemment n'est pas hermitienne c'est-à-dire que $a(t; u(t), v(t)) \neq a(t; v(t), u(t))$.

Pour cela, posons

$$a(t; u(t), v(t)) = a_1(t; u(t), v(t)) + a_2(t; u(t), v(t))$$

avec

$$a_1(t; u(t), v(t)) = \int_{R_1}^{R_2} r^3 \mu(r, t) u'(r, t) v'(r, t) dr + \lambda \int_{R_1}^{R_2} r^3 u(r, t) v(r, t) dr$$

$$a_2(t; u(t), v(t)) = \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^t K_1(r, s, t) u'(r, t-s) ds \right) v'(r, t) dr$$

où $K_1(r, s, \cdot)$ désigne le prolongement de $K_1(r, s, \cdot)$ par 0 en dehors de $[0, T]$;
 $a_1(t; u(t), v(t))$ est alors une forme hermitienne ; en effet, comme on le vérifie aisément

$$a_1(t; u(t), v(t)) = a_1(t; v(t), u(t)).$$

Notations

Nous introduirons une famille de formes bilinéaires $b_1(t; u, v)$ définies sur $\mathcal{V}_X \times \mathcal{V}$, telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) $t \rightarrow b_1(t; u, v)$ est une fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^+$
- (ii) $|b_1(t; u, v)| + |\dot{b}_1(t; u, v)| \leq c_1 \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}$
- (iii) $b_1(t; u, v) = a_1(t; u, v)$ pour $t \in [0, T]$
 $b_1(t; u, v) = b_1(t; v, u) \quad u, v \in \mathcal{V}$
- (iv) $b_1(t; v, v) \geq \alpha_1 \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \alpha_1 > 0.$
- (v) On choisit une constante $\gamma_1 > 0$ telle que

$$2 \gamma_1 b_1(t; v, v) - \dot{b}_1(t; v, v) \geq \alpha_2 \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \alpha_2 > 0$$

(Un tel choix est toujours possible ; cf. J. L. Lions ([12] p. 65-68).

Pour la démonstration que nous avons en vue, introduisons une constante $\gamma > 0$ définie comme suit.

Par hypothèse (cf 1.1.4) la fonctionnelle $g \rightarrow K_g(\cdot)$ où $K_g(\cdot)$ désigne le noyau de la fonctionnelle linéaire tangente est supposée continue sur $\mathcal{E}$; il en résulte en particulier que $r \rightarrow K(r, 0, t)$ est continue sur $[R_1, R_2]$ puisque

$$|K(r, 0, t) - K(r', 0, t)| \leq A |K_g(0) - K_{g'}(0)|$$

Désignons par m la borne supérieure de $K(\cdot, 0, t)$ sur le compact $[R_1, R_2]$ et définissons par γ

$$\gamma = \frac{R_1^3 m}{\alpha_1} + \gamma_1 \quad (m \geq 0)$$

On peut alors aisément vérifier que

$$(1) \quad 2 \gamma b_1(t; v, v) - \dot{b}_1(t; v, v) \geq (\alpha_2 + 2 R_1^3 m) \|v\|_{\mathcal{V}}^2$$

Nous utiliserons cette dernière inégalité par la suite.

Soit

$$\begin{aligned} F_1 = \{ U \in H_0^1(Q) \mid e^{-\gamma t} U \in H_0^1(\cdot) -\infty, +\infty[\times I) ; \\ e^{-\gamma t} \dot{U} \in L^2(\cdot) -\infty, +\infty[\times I) ; \\ U \text{ nulle pour } t < 0 \} \end{aligned}$$

sur l'espace F_1 nous définirons la norme

$$\|U\|_{F_1}^2 = \int_0^{+\infty} \|e^{-\gamma t} U(t)\|_{\frac{2}{\gamma}}^2 dt + \int_0^{+\infty} \|e^{-\gamma t} \dot{U}(t)\|_{\frac{2}{\gamma}}^2 dt$$

Enfin soit $\mathfrak{F}_1$, l'espace des fonctions $\varphi \in F_1$ telles que $e^{-\gamma t} \dot{\varphi} \in F_1$; sur cet espace nous définirons

$$|||\varphi||| = \|\varphi\|_{F_1}$$

Pour $U \in F_1$ et $\varphi \in \mathfrak{F}_1$ posons

$$\begin{aligned} E(U, \varphi) = \int_0^{+\infty} \{ b_1(t; e^{-\gamma t} U(t), e^{-\gamma t} \dot{\varphi}(t)) + b_2(t; e^{-\gamma t} U(t), e^{-\gamma t} \dot{\varphi}(t)) \} dt \\ + \int_0^{+\infty} (\rho r^3 e^{-\gamma t} \dot{U}(t), e^{-\gamma t} \dot{\varphi}(t))_{\frac{2}{\gamma}} dt \end{aligned}$$

et

$$L(\varphi) = \int_0^{+\infty} (e^{-\gamma t} f_1(t), e^{-\gamma t} \dot{\varphi}(t))_{\frac{2}{\gamma}} dt$$

où f_1 désigne le prolongement de f_1 initial par zéro hors de $[0, T]$. Remarquons alors que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} b_2(t; e^{-\gamma t} \varphi(t), e^{-\gamma t} \dot{\varphi}(t)) dt \\ = \int_0^{+\infty} \left(\int_{R_1}^{R_2} r^3 \left(\int_0^t K_1(x, s, t) e^{-\gamma(t-s)} \varphi'(x, t-s) ds \right) e^{-\gamma t} \dot{\varphi}'(x, t) dr \right) dt \\ = \int_{R_1}^{R_2} r^3 \left(\int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \dot{\varphi}'(x, t) \left(\int_0^t K_1(x, s, t) e^{-\gamma(t-s)} \varphi'(x, t-s) ds \right) dt \right) dr \end{aligned}$$

Considérons l'intégrale

$$\begin{aligned} J = \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \dot{\varphi}'(x, t) \left(\int_0^t K_1(x, s, t) e^{-\gamma(t-s)} \varphi'(x, t-s) ds \right) dt \\ = 2\gamma \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \varphi'(x, t) \left(\int_0^t K_1(x, s, t) e^{-\gamma(t-s)} \varphi'(x, t-s) ds \right) dt \\ + \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \varphi'(x, t) \left(\int_0^t -\frac{\partial K_1}{\partial t}(x, s, t) e^{-\gamma(t-s)} \varphi'(x, t-s) ds \right) dt \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \varphi' (x, t) \left(\int_0^t - \frac{\partial K_1}{\partial s} (x, s, t) e^{-\gamma(t-s)} \varphi' (x, t-s) ds \right) dt \\ - \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} K_1 (x, 0, t) \varphi'^2 (x, t) dt$$

Or sous les hypothèses du lemme 2

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \varphi' (x, t) \left(\int_0^t K_1 (x, s, t) e^{-\gamma(t-s)} \varphi' (x, t-s) ds \right) dt \\ = \int_0^T e^{-\gamma t} \varphi' (x, t) \left(\int_0^t K_1 (x, s, t) e^{-\gamma(t-s)} \varphi' (x, t-s) ds \right) dt \geq 0$$

Il en est de même pour les intégrales apparaissant dans J avec pour noyaux

$$- \frac{\partial K_1}{\partial t} (x, s, t) \text{ (lemme 2) et } - \frac{\partial K_1}{\partial s} (x, s, t) \text{ (proposition 2).}$$

Il résulte ainsi de ces diverses inégalités que

$$J \geq - \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} K_1 (x, 0, t) \varphi'^2 (x, t) dt$$

Reprenons alors $E(\varphi, \varphi)$; d'après ce qui précède

$$2 E(\varphi, \varphi) \geq 2 \int_0^{+\infty} b_1 (t ; e^{-\gamma t} \varphi(t), e^{-\gamma t} \dot{\varphi}(t)) - 2 \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left(\int_{R_1}^{R_2} K_1 (x, 0, t) \right. \\ \left. \varphi'^2 (x, t) r^3 dx \right) dt + 2 \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|\varphi'(t)\|_{\mathfrak{L}}^2 dt$$

or

$$2 \int_0^{+\infty} b_1 (t ; e^{-\gamma t} \varphi(t), e^{-\gamma t} \dot{\varphi}(t)) dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left\{ \frac{d}{dt} b(t ; \varphi(t), \varphi(t)) - \dot{b}(t, \varphi(t), \varphi(t)) \right\} dt$$

puisque b_1 est hermitienne d'après (iii).

Utilisons ce dernier résultat dans la majoration de $E(\varphi, \varphi)$

$$= 2E(\varphi, \varphi) \geq \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} [2\gamma b(t; \varphi(t), \varphi(t)) - \dot{b}(t; \varphi(t), \varphi(t)) - 2R_1^3 m \|\varphi'(t)\|_{\mathfrak{L}}^2] dt + 2 \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|\varphi'(t)\|_{\mathfrak{L}}^2 dt$$

or d'après (1)

$$2\gamma b(t ; \varphi(t), \varphi(t)) - \dot{b}(t ; \varphi(t), \varphi(t)) - 2 R_1^3 m \|\varphi'(t)\|_{\mathfrak{L}}^2 \geq \alpha_2 \|\varphi(t)\|_{\mathfrak{V}}^2$$

de sorte que

$$E(\varphi, \varphi) \geq \inf \left(\frac{\alpha_2}{2}, 1 \right) \|\varphi\|^2$$

Appliquons alors le théorème précédemment cité [p. 30] : il existe donc $U \in F_1$ tel que

$$E(U, \varphi) = L(\varphi)$$

Il devient maintenant possible d'utiliser l'interprétation donnée à ce résultat par J. L. Lions ([12], p. 65-68), ce qui achève ici notre démonstration.

En résumé nous venons d'obtenir l'existence d'une solution w de l'équation III. 5.1 telle que

$$\begin{cases} w \in H_0^1(Q) \\ \dot{w} \in L^2(Q) \end{cases}$$

sous les hypothèses de la proposition 2 et avec $f \in L^2(Q)$.

Si l'on applique ce résultat à l'équation II-(4).1 en posant successivement $n = 1, 2, 3, \dots$ nous avons ainsi défini une suite de fonctions $(w^n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} w^n \in H_0^1(Q) \\ w^n \in L^2(Q) \end{cases}$$

l'hypothèse $\varphi^{n-1} \in L^2(Q)$ étant satisfaite puisque $\mathcal{U}$ est considéré comme opérateur défini sur $\mathcal{E}_1$ à valeurs dans $H^1(Q)$.

Un cas particulier est à considérer ici : l'appartenance de φ à $L^2(Q)$ pour $n = 0$; l'équation II. 3 (3) dépend des conditions initiale et aux limites imposées à w .

Proposition 3

Supposons que les fonctions $t \rightarrow \Omega_1(t)$, $t \rightarrow \Omega_2(t)$ soient dérivables sur $[0, T]$ et que $\dot{\Omega}_1(\cdot)$, $\dot{\Omega}_2(\cdot) \in L^2([0, T])$.

Supposons d'autre part que $(r, t) \rightarrow w_0(r, t)$ soit telle que $f_0(\cdot)$ et $g_0(\cdot) \in \mathcal{E}_1$ avec

$$f_0(s) = \begin{cases} w'_0(r, t-s) & T < s < +\infty \\ 0 & 0 \leq s \leq T \end{cases}$$

$$g_0(s) = \begin{cases} w''_0(r, t-s) & T < s < +\infty \\ 0 & 0 \leq s \leq T \end{cases}$$

Alors il existe une solution de l'équation

$$\mu_{(0)} [r^3 w^{0'}(r, t) + [r^3 \int_0^{+\infty} K_{(0)}(s) w^{0'}(r, t-s) ds]' = \rho r^3 \dot{w}^0(r, t)$$

telle que $w^0 \in H^1(Q)$, $\dot{w}^0 \in L^2(Q)$

$$\left\{ \begin{array}{l} w^0(R_1, t) = \Omega_1(t) \\ w^0(R_2, t) = \Omega_2(t) \end{array} \right\} \quad t > 0 \quad w^0(r, t) = w_0(r, t) \quad t \leq 0, r \in [R_1, R_2]$$

Démonstration

La proposition 2 a montré l'existence d'une solution de l'équation II.3 (3) associée à l'équation précédente, dans le cas $\varphi \in L^2(Q)$; Or, le calcul de φ , développé dans II.3 (8) montre que

$$\varphi(x, t) = - \left[r^3 \int_t^{+\infty} K_{(0)}(s) \omega'_0(x, t-s) ds \right]' - \frac{3r^2 \mu(0)}{R_1 - R_2} [\Omega_1(t) - \Omega_2(t)] - \frac{3r^2}{R_1 - R_2} \int_0^t K_{(0)}(s) [\Omega_1(t-s) - \Omega_2(t-s)] ds + \frac{\rho r^4}{R_1 - R_2} [\dot{\Omega}_1(t) - \dot{\Omega}_2(t)] + \frac{\rho r^3}{R_1 - R_2} [\dot{\Omega}_2(t) R_1 - \dot{\Omega}_1(t) R_2]$$

φ est ainsi composé de cinq termes dont l'appartenance à $L^2(Q)$ est évidente pour le second, les quatrième et cinquième.

En ce qui concerne $(x, t) \rightarrow r^2 \int_0^t K_{(0)}(s) [\Omega_1(t-s) - \Omega_2(t-s)] ds$ nous pouvons utiliser l'inégalité suivante :

$$r^4 \left(\int_0^t K_{(0)}(s) [\Omega_1(t-s) - \Omega_2(t-s)] ds \right)^2 \leq R_2^4 \int_0^t K_{(0)}^2(s) ds \int_0^t [\Omega_1(s) - \Omega_2(s)]^2 ds$$

or $s \rightarrow K_{(0)}(s)$ est continue sur $[0, T]$ d'après les hypothèses du lemme 1 ; elle est donc bornée sur cet intervalle.

$$\text{D'autre part } \int_0^T \left(\int_0^t [\Omega_1(s) - \Omega_2(s)]^2 ds \right) dt \leq T (\|\Omega_1\|_{L^2([0, T])}^2 + \|\Omega_2\|_{L^2([0, T])}^2)$$

il en résulte ainsi que

$$(x, t) \rightarrow r^4 \int_0^t K_{(0)}(s) [\Omega_1(t-s) - \Omega_2(t-s)] ds \in L^2(Q).$$

Remarquons enfin que

$$- \left[r^3 \int_t^{+\infty} K_{(0)}(s) \omega'_0(x, t-s) ds \right]' = -3r^2 \mathcal{L}_1(0; f_0) - r^3 \mathcal{L}_1(0; g_0)$$

Or d'après l'hypothèse de la proposition 3,

$$\|\mathcal{L}_1(0; f_0)\|_{L^2(Q)}^2 \leq M \|f_0\|_{\mathcal{E}_1}^2 ; \|\mathcal{L}_1(0; g_0)\|_{L^2(Q)}^2 \leq M \|g_0\|_{\mathcal{E}_1}^2$$

les cinq termes composant $\varphi(.,.)$ appartenant tous à $L^2(Q)$, $\varphi \in L^2(Q)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

III 1 EXISTENCE D'UNE SOLUTION DU PROBLEME

Le chapitre précédent a permis la construction d'une suite de fonctions $(w^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $w^n \in H_0^1(Q)$, solutions de l'équation

$$(1) [r^3 \mu_{n-1}(x, t) w^{n'}(x, t)]' + [r^3 \int_0^t K_{n-1}(x, s, t) w^{n'}(x, t-s) ds]' = \rho r^3 \dot{w}^n(x, t) + \varphi^{n-1}(x, t)$$

où $\varphi^{n-1} \in L^2(Q)$, $\dot{w}^n \in L^2(Q)$.

Nous allons nous préoccuper dans cette première partie de la convergence de cette suite dans $H_0^1(Q)$. Pour cela nous effectuerons un certain nombre de majorations de $\|w^n\|_{H^1(Q)}$, que nous appellerons estimations à priori.

III. 1. 1 Estimations à priori de w^n

a) "Inégalités de l'énergie"

Notations. Par souci de concision (les calculs qui vont suivre sont assez lourds) nous noterons

$$[r^3 \int_0^t k(x, s, t) w'(x, t-s) ds]' \text{ la quantité}$$

$$[r^3 \mu(x, t) w'(x, t)]' + [r^3 \int_0^t K(x, s, t) w'(x, t-s) ds]'$$

Nous noterons par $(f, g)_{L^2 L^2}$ le produit scalaire pour f et $g \in L^2(Q)$ et par (f, g) le produit scalaire défini sur $L^2 L^2(I)$.

Nous allons déduire à présent, de l'équation (1), un ensemble d'inégalités qui nous servira à étudier la convergence de (w^n) ; ces inégalités seront valables pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que nous omettrons l'indice n dans (1).

Remarques

1) Les calculs qui vont suivre ont un sens puisque, d'après la proposition 2, $\dot{w}, \varphi \in L^2(Q)$, ainsi que $\rho r^3 \dot{w} + \varphi$, de sorte qu'il en est de même pour

$$[r^3 \int_0^t k(x, s, t) w'(x, s, t) ds]'$$

2) Nous utiliserons par la suite, le résultat suivant :

si $f, g \in L^2(Q)$ alors $(f, g) \in L^1(]0, t[)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Ceci résulte en effet des inégalités.

$$\begin{aligned} \int_0^t (f(\cdot, u), g(\cdot, u)) \, du &\leq \int_0^t \|f(\cdot, u)\| \|g(\cdot, u)\| \, du \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|f(\cdot, u)\|^2 + \|g(\cdot, u)\|^2) \, du \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^T (\|f(\cdot, u)\|^2 + \|g(\cdot, u)\|^2) \, du \\ &= \frac{1}{2} \left(\|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2 \right) \end{aligned}$$

Reprenons alors l'équation (1) et effectuons le produit scalaire de celle-ci par $w \in H_0^1(\Omega)$.

Nous obtenons

$$(2) \quad \left(\left[r^3 \int_0^t k(\cdot, s, t) w'(\cdot, t-s) \, ds \right]', w(\cdot, t) \right) = \rho (r^3 \dot{w}(\cdot, t), w(\cdot, t)) + (\varphi(\cdot, t), w(\cdot, t))$$

$$\text{Or} \quad \rho (r^3 \dot{w}(\cdot, t), w(\cdot, t)) = \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \|r^{3/2} w(\cdot, t)\|^2$$

et

$$\left(\left[r^3 \int_0^t k(\cdot, s, t) w'(\cdot, t-s) \, ds \right]', w(\cdot, t) \right) = - \left(\int_0^t k(\cdot, s, t) w'(\cdot, t-s) \, ds, r^3 w'(\cdot, t) \right)$$

égalité qui résulte de l'appartenance de w à $H_0^1(\Omega)$.

D'autre part, la remarque 2 nous permet d'intégrer la relation (2) entre 0 et t , de sorte que

$$(3) \quad \int_0^t \left(\int_0^u k(\cdot, s, u) w'(\cdot, u-s) \, ds, r^3 w'(\cdot, u) \right) \, du + \frac{\rho}{2} \|r^{3/2} w(\cdot, t)\|^2 = - \int_0^t (\varphi(\cdot, u), w(\cdot, u)) \, du$$

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad &\int_0^t \left(\int_0^u k(\cdot, s, u) w'(\cdot, u-s) \, ds, r^3 w'(\cdot, u) \right) \, du \\ &= \left(\int_0^t \left(\int_0^u k(\cdot, s, u) w'(\cdot, u-s) \, ds \right) w'(\cdot, u) \, du, r^3 \right) \end{aligned}$$

quantité, qui compte tenu de la définition k , peut s'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(\int_0^u k(x, s, u) w'(x, u) \right) \, du &= \int_0^t r^3 \mu(x, u) w'^2(x, u) \, du \\ &+ \int_0^t \left(\int_0^u K(x, s, u) w'(x, u-s) \, ds \right) w'(x, u) \, du. \end{aligned}$$

Or sous les hypothèses du lemme 2 concernant l'énergie dissipée par frottement interne (hypothèse qui porte sur K et sert à assurer l'existence d'une solution w de (1)), la dernière intégrale écrite est positive ou nulle. La relation (3) permet ainsi de déduire l'inégalité

$$(4) \quad \frac{\rho}{2} \|r^{3/2} w(\cdot, t)\|^2 + \int_0^t \|\mu^{1/2}(\cdot, u) r^{3/2} w'(\cdot, u)\|^2 du \leq - \int_0^t (\varphi(\cdot, u), w(\cdot, u)) du$$

ce qui montre que

$$(5) \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \|r^{3/2} w(\cdot, t)\|^2 &\leq - \int_0^t (\varphi(\cdot, u), w(\cdot, u)) du \\ \int_0^t \|\mu^{1/2}(\cdot, u) r^{3/2} w'(\cdot, u)\|^2 du &\leq - \int_0^t (\varphi(\cdot, u), w(\cdot, u)) du \end{aligned}}$$

$$b) \text{ Majoration de } I = - \int_0^t (\varphi(\cdot, u), w(\cdot, u)) du$$

Remarquons tout d'abord que

$$(6) \quad I = - \int_0^t (\varphi(\cdot, u), w(\cdot, u)) du = \int_0^t (\tilde{\varphi}(\cdot, u), w'(\cdot, u)) du$$

puisque $w \in H_0^1(Q)$.

Dans la relation précédente nous désignons par $\tilde{\varphi}(\cdot, u)$ une primitive quelconque de $\varphi(\cdot, u)$.

De plus, l'égalité (6) prend un sens pour $\tilde{\varphi}(\cdot, u) \in L^2(I)$ pour tout $u \in [0, t]$ (puisque $w'(\cdot, u) \in L^2(I)$).

Or ceci est vérifié si l'on tient compte de la remarque suivante

si $\varphi \in L^2(]0, t[)$ alors $\varphi \in L^1(]0, t[)$ ($0 < t < +\infty$)

et $\int_0^u \varphi(v) dv \in L^2(]0, t[)$ pour tout $u \in [0, t]$.

En effet

$$\int_0^t \left(\int_0^u \varphi(v) dv \right)^2 du \leq \int_0^t u \left(\int_0^u \varphi^2(v) dv \right) du \leq \frac{t^2}{2} \|\varphi\|_{L^2(]0, t[)}^2$$

Reprenons alors l'intégrale I.

Soit μ_0 un nombre positif donné arbitrairement (l'introduction d'un tel nombre sera justifiée par la suite); alors

$$\begin{aligned} \int_0^t (\tilde{\varphi}(\cdot, u), w'(\cdot, u)) du &= \int_0^t \left(\frac{\tilde{\varphi}(\cdot, u)}{(\mu_0 R_1^3)^{1/2}}, (\mu_0 R_1^3)^{1/2} w'(\cdot, u) \right) du \\ &\leq \int_0^t \frac{\|\tilde{\varphi}(\cdot, u)\|}{(\mu_0 R_1^3)^{1/2}} (\mu_0 R_1^3)^{1/2} \|w'(\cdot, u)\| du \\ &\leq \frac{1}{2\mu_0 R_1^3} \int_0^t \|\tilde{\varphi}(\cdot, u)\|^2 du + \frac{\mu_0 R_1^3}{2} \int_0^t \|w'(\cdot, u)\|^2 du. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous nombres μ_0 , R_1 , strictement positifs, on obtient l'inégalité

$$(7) \quad I \leq \frac{1}{2\mu_0 R_1^3} \int_0^t \|\bar{\Phi}(\cdot, u)\|^2 du + \frac{\mu_0 R_1^3}{2} \int_0^t \|\omega'(\cdot, u)\|^2 du$$

c) Majoration de $\|\omega'\|_{L^2}$, $\|\omega\|_{L^2}$

Reprenons la seconde inégalité (5), qui, compte tenu de (7) s'écrit

$$(8) \quad \int_0^t \|\mu^{1/2}(\cdot, u) r^{3/2} \omega'(\cdot, u)\|^2 du \leq I \leq \frac{1}{2\mu_0 R_1^3} \int_0^t \|\bar{\Phi}(\cdot, u)\|^2 du + \frac{\mu_0 R_1^3}{2} \int_0^t \|\omega'(\cdot, u)\|^2 du$$

Par définition, la fonction $(r, t) \rightarrow \mu(r, t)$ qui apparaît dans le cadre de ce problème, représente la viscosité locale instantanée du fluide simple considéré. Nous avons, dans la partie précédente, fait l'hypothèse d'existence d'un nombre $\mu_0 > 0$ tel que

$$\mu(r, t) \geq \mu_0 > 0 \quad \text{pour } (r, t) \in (Q).$$

Nous reprendrons ici cette hypothèse qui permet d'écrire

$$\int_0^t \|\mu^{1/2}(\cdot, u) r^{3/2} \omega'(\cdot, u)\|^2 du \geq \mu_0 R_1^3 \int_0^t \|\omega'(\cdot, u)\|^2 du$$

Portons cette dernière relation dans l'inégalité (8) ; après simplification, nous obtenons

$$\frac{\mu_0 R_1^3}{2} \int_0^t \|\omega'(\cdot, u)\|^2 du \leq \frac{1}{2\mu_0 R_1^3} \int_0^t \|\bar{\Phi}(\cdot, u)\|^2 du$$

soit

$$(9) \quad \int_0^t \|\omega'(\cdot, u)\|^2 du \leq \frac{1}{(\mu_0 R_1^3)^2} \int_0^t \|\bar{\Phi}(\cdot, u)\|^2 du$$

Cette dernière inégalité permet de donner à présent une nouvelle majoration de $\|\omega(\cdot, t)\|^2$
En effet

$$\frac{\rho}{2} \|r^{3/2} \omega(\cdot, t)\|^2 \leq I \leq \frac{1}{2\mu_0 R_1^3} \int_0^t \|\bar{\Phi}(\cdot, u)\|^2 du + \frac{\mu_0 R_1^3}{2} \int_0^t \|\omega'(\cdot, u)\|^2 du$$

ce qui, compte-tenu de (9), permet d'écrire

$$\frac{\rho}{2} \|r^{3/2} \omega(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{1}{\mu_0 R_1^3} \int_0^t \|\bar{\Phi}(\cdot, u)\|^2 du$$

or $r \geq R_1$ d'où

$$\|\omega(\cdot, t)\|^2 \leq \frac{2}{\rho \mu_0 R_1^6} \int_0^t \|\bar{\Phi}(\cdot, u)\|^2 du$$

Posons $\alpha_0 = \frac{2T}{\rho \mu_0 R_1^6}$, $\beta_0 = \frac{1}{(\mu_0 R_1^3)^2}$; les inégalités (9) et (10) s'écrivent ainsi

$$(11) \quad \begin{cases} \|\omega\|_{L^2}^2 \leq \alpha_0 \|\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2 \\ \|\omega^1\|_{L^2}^2 \leq \beta_0 \|\tilde{\varphi}\|_{L^2}^2 \end{cases}$$

III. 1. 2 Convergence de la suite $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$

a) Détermination de $\tilde{\varphi}$

Reprenons l'équation III.1 avec $n = 1$; nous obtenons

$$[r^3 \mu_0 \omega^{1'}(r, t)]' + [r^3 \int_0^t K_0(r, s, t) \omega^{1'}(r, t-s) ds]' = \rho r^3 \dot{\omega}^1(r, t) + \varphi^0(r, t)$$

avec

$$\varphi^0(r, t) = \rho r^3 \dot{\omega}^0(r, t) - [r^2 \mathcal{U}(f_0)]'$$

Or, par hypothèse, ω^0 vérifie

$$\begin{cases} \rho r^3 \dot{\omega}^0(r, t) = [r^2 \mathcal{L}_1(0; f^0)]' \\ \text{où} \quad \begin{cases} f^0(r, s, t) = r \omega^0(r, t-s), & (0 \leq s \leq t) \end{cases} \end{cases}$$

Il en résulte donc que

$$\varphi^0(r, t) = [r^2 (\mathcal{L}_1(0; f^0) - \mathcal{U}(f^0))]'$$

Puisque $\tilde{\varphi}(\cdot, t)$ désigne une primitive quelconque de $\varphi^0(\cdot, t)$ nous choisirons pour

$$\tilde{\varphi}^0(r, t) = -r^2 [\mathcal{U}(f^0) - \mathcal{L}_1(0; f^0)]$$

Remarque

Dans tout ce qui suit, les fonctions f^i , donc f_i , sont supposées appartenir à $\mathcal{E}_1$; nous montrerons par la suite que ceci ne constitue nullement une hypothèse supplémentaire et qu'il en est réellement ainsi.

Reprenons à nouveau l'équation III.1 avec $n=2$, c'est-à-dire

$$(2) \quad [r^3 \mu_1(r, t) \omega^{2'}(r, t)]' + [r^3 \int_0^t K_1(r, s, t) \omega^{2'}(r, t-s) ds]' = \rho r^3 \dot{\omega}^2(r, t) + \varphi^1(r, t)$$

avec

$$\varphi^1(r, t) = \rho r^3 \dot{\omega}_1(r, t) - [r^2 \mathcal{U}(f_1)]'$$

Or $\omega_1 = \omega^0 + \omega^1$; si l'on utilise cette décomposition et le fait que ω^1 vérifie III.1.2 (1) nous pouvons écrire

$$\rho r^3 \dot{\omega}_1(r, t) = \rho r^3 (\dot{\omega}^0(r, t) + \dot{\omega}^1(r, t)) = [r^2 \mathcal{L}_1(f^0, f^1)]' + [r^2 \mathcal{U}(f^0)]'$$

d'où

$$\varphi^1(r, t) = - [r^2 \{ \mathcal{U}(f^0 + f^1) - \mathcal{U}(f^0) - \mathcal{L}_1(f^0; f^1) \}] ,$$

Comme précédemment nous choisirons pour Φ^1

$$\boxed{\Phi^1(r, t) = -r^2 [\mathcal{U}(f^0 + f^1) - \mathcal{U}(f^0) - \mathcal{L}_1(f^0; f^1)]}$$

On peut recommencer la détermination de Φ^n , pour $n = 2, 3 \dots$. Par un raisonnement analogue au précédent on montre que

$$\varphi^n(r, t) = - [r^2 \{ \mathcal{U}(f_{n-1} + f^n) - \mathcal{U}(f_{n-1}) - \mathcal{L}_1(f_{n-1}; f^n) \}] ,$$

soit un choix de Φ^n

$$(3) \quad \boxed{\Phi^n(r, t) = -r^2 [\mathcal{U}(f_{n-1} + f^n) - \mathcal{U}(f_{n-1}) - \mathcal{L}_1(f_{n-1}; f^n)]}$$

Cette formule est d'ailleurs valable pour $n \geq 0$, avec pour convention $f_{-1} \equiv 0$.

b) Majoration de $\|\Phi^n\|_{L^2}$

Rappelons tout d'abord la formule établie en II. 1. 4 (12)

$$(4) \quad \|\mathcal{U}(g_1 + f_1) - \mathcal{U}(g_1) - \mathcal{L}_1(g_1; f_1)\|_{L^2} \leq M \|f_1\|_{\mathcal{E}_1}$$

Nous allons utiliser cette inégalité pour effectuer la majoration cherchée. Posons tout d'abord $n = 0$.

Alors

$$\Phi^0(r, t) = -r^2 [\mathcal{U}(f_0) - \mathcal{L}_1(0; f_0)] = -r^2 [\mathcal{U}(f_0) - \mathcal{U}(0) - \mathcal{L}_1(0; f_0)]$$

En effet, puisque $\mathcal{U}$ est une fonctionnelle impaire $\mathcal{U}(0) = 0$. Comme nous le constatons par la définition de Φ_0 , cette fonction a un sens pour $f_0 \in \mathcal{E}_1$. Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi.

$$f_0(r, s, t) = \begin{cases} r \omega'^0(r, t-s) & 0 \leq s < t \\ r \omega'_0(r, t-s) & s \geq t \end{cases} \quad \text{avec } \omega^0(r, t) = \omega_0(r, t) \text{ pour } t \leq 0.$$

Or sous les hypothèses de la proposition 3

$$\bar{f}_0(r, s, t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s < t \\ r \omega'_0(r, t-s) & s \geq t \end{cases} \in \mathcal{E}_1$$

Il suffit ainsi pour montrer que $f_0 \in \mathcal{E}_1$ que

$$\hat{f}_0(r, s, t) = \begin{cases} r \omega'^0(r, t-s) & 0 \leq s < t \\ 0 & s \geq t \end{cases} \in \mathcal{E}_1$$

Calculons $|||\widehat{f}_0|||_{\mathcal{E}_1}^2 = \bar{\mu}_0 \|r w^{0'}\|_{L^2}^2 + \int_0^{+\infty} h(s) \|r w^{0'}(.,.,s)\|_{L^2}^2 ds$

Or nous avons vu dans la proposition 3 que $w^{0'} \in L^2(Q)$.

Posons $\|w^{0'}\|_{L^2}^2 = a_0^2 < +\infty$

Il résulte alors de II.1.3 b) que

$$\int_0^{+\infty} h(s) \|r w^{0'}(0,.,s)\|_{L^2}^2 ds \leq \int_0^t h(s) \|r w^{0'}\|_{L^2}^2 ds$$

d'où

$$|||\widehat{f}_0|||_{\mathcal{E}_1}^2 \leq a_0^2 (\bar{\mu}_0 + R_2^2 \int_0^T h(u) du) = k_0 < +\infty$$

Enfin puisque $f_0 = \tilde{f}_0 + \widehat{f}_0$, et que $\tilde{f}_0, \widehat{f}_0 \in \mathcal{E}_1$

$$\underline{f_0 \in \mathcal{E}_1} \quad \text{c. q. f. d.}$$

Nous poserons par la suite

$$|||f_0|||_{\mathcal{E}_1}^2 = k_0$$

Revenons à la définition de Φ^0 . Nous pouvons alors appliquer l'inégalité (4) avec $g_1 = 0, f_1 = f_0 \in \mathcal{E}_1$; on obtient ainsi la majoration

$$\|\Phi^0\|_{L^2}^2 \leq M^2 R_2^4 k_0 = \lambda_0$$

soit

$$\boxed{\|\Phi^0\|_{L^2}^2 \leq \lambda_0}$$

Nous allons déduire de l'inégalité précédente les résultats suivants

- (i) $f^1 \in \mathcal{E}_1$
- (ii) $f_1 = f_0 + f^1 \in \mathcal{E}_1$
- (iii) $\|\Phi^1\|_{L^2}^2 \leq M^2 R_2^4 c_0 \lambda_0$; $c_0 = \beta_0 R_2^2 (\bar{\mu}_0 + \mu(\cdot) + 0, +\infty[)$
 $= \beta_0 R_2^2 (\bar{\mu}_0 + H)$

(i) $f^1 \in \mathcal{E}_1$.

Pour établir ce résultat reprenons les inégalités (11) déduite de l'équation (1) vérifiée par w^1 pour $n = 1$.

Nous obtenons
$$\begin{cases} \|w^1\|_{L^2}^2 \leq \alpha_0 \lambda_0 \\ \|w^{1'}\|_{L^2}^2 \leq \beta_0 \lambda_0 \end{cases}$$

Ces deux dernières relations montrent que

$w^1 \in H^1(Q)$ et compte tenu de $w^1(R_1, t) = w^1(R_2, t) = 0$ on a même $w^1 \in H_0^1(Q)$.

soit

$$f^1(r, s, t) = \begin{cases} r w^1(r, t-s) & 0 \leq s < t \\ 0 & s \geq t \end{cases}$$

Calculons

$$|||f^1|||_{\mathfrak{E}_1}^2 = \bar{\mu}_0 \|r w^1\|_{L^2}^2 + \int_0^t h(s) \|r w^1(\cdot, \cdot-s)\|_{L^2}^2 ds$$

$$\leq \bar{\mu}_0 R_2^2 \beta_0 \lambda_0 + R_2^2 H \beta_0 \lambda_0 = \lambda_0 R_2^2 \beta_0 (\bar{\mu}_0 + H) = c_0 \lambda_0.$$

$$\text{où } H = \mu([0, +\infty[) = \int_0^{+\infty} h(s) ds < +\infty$$

d'où

$$(6) \quad |||f^1|||_{\mathfrak{E}_1}^2 \leq c_0 \lambda_0 \quad \text{ce qui montre que } f^1 \in \mathfrak{E}_1.$$

ii) $f_1 \in \mathfrak{E}_1$

Ceci résulte évidemment du fait que f_0 et $f^1 \in \mathfrak{E}_1$ et que $f_1 = f_0 + f^1$.

iii) Majoration de $\bar{\Phi}_1$

Puisque $f_1, f_0, f^1 \in \mathfrak{E}_1$ la formule

$$\bar{\Phi}^1(r, t) = -r^2 [\mathcal{U}(f_0 + f^1) - \mathcal{U}(f_0) - \mathfrak{L}_1(f_0; f^1)]$$

prend un sens

Or d'après les inégalités (4) et (6)

$$\|\mathcal{U}(f_0 + f^1) - \mathcal{U}(f_0) - \mathfrak{L}_1(f_0; f^1)\|_{L^2}^2 \leq M^2 |||f^1|||_{\mathfrak{E}_1}^2 \leq M^2 c_0 \lambda_0$$

d'où

$$\|\bar{\Phi}^1\|_{L^2}^2 \leq M^2 R_2^4 c_0 \lambda_0$$

Majoration de $\bar{\Phi}^n$.

Nous pouvons, par un raisonnement en tout point semblable à celui fait précédemment, obtenir une majoration de $\|\bar{\Phi}^n\|_{L^2}^2, \|w^n\|_{L^2}^2$.

En effet, la majoration de $\|\bar{\Phi}^1\|_{L^2}$ permet celles de $\|w^2\|_{L^2}, \|w'^2\|_{L^2}$, ces dernières fournissant à leur tour une majoration de $\|\bar{\Phi}^2\|_{L^2}$, donc de $\|\bar{\Phi}^3\|_{L^2}$. Nous passerons sur les calculs intermédiaires pour ne donner ici que les résultats.

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \|w^n\|_{L^2}^2 \leq \alpha_0 \lambda_0 L^{n-1} \\ \|w'^n\|_{L^2}^2 \leq \beta_0 \lambda_0 L^{n-1} \\ \|\Phi^n\|_{L^2}^2 \leq \lambda_0 L^n \\ \|f^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \frac{\lambda_0 L^n}{M^2} \end{array} \right.$$

où

$$L = c_0 M^2 R_2^4$$

c) Convergence de $\{w^n\} \in H^1(\Omega)$

Rappelons que pour $n \geq 1$, w_n est définie par

$$w_n = w_{n-1} + w^{n-1}$$

si l'on explicite w_n en fonction des w^i , $i = 0, \dots, n-1$, on obtient ainsi

$$w_n = \sum_{p=0}^{n-1} w^p$$

de sorte que

$$\left\{ \begin{array}{l} \|w_n\|_{L^2} \leq \sum_{p=0}^{n-1} \|w^p\|_{L^2} \\ \|w'_n\|_{L^2} \leq \sum_{p=0}^{n-1} \|w'^p\|_{L^2} \end{array} \right.$$

$$\text{Or } \|w_n\|_{H^1(\Omega)}^2 = (\|w_n\|_{L^2}^2 + \|w'_n\|_{L^2}^2)^{1/2}$$

$$\leq \|w_n\|_{L^2} + \|w'_n\|_{L^2}$$

Utilisons maintenant les inégalités (7) ; elles permettent une majoration de $\|w_n\|_{H^1(\Omega)}$

$$\text{En effet } \left\{ \begin{array}{l} \|w_n\|_{L^2} \leq b_0 + (\alpha_0 \lambda_0)^{1/2} \sum_{p=1}^{n-1} L^{\frac{p-1}{2}} = b_0 + (\alpha_0 \lambda_0)^{1/2} \left(\frac{1-L^{n/2}}{1-L^{1/2}} \right) \\ \|w'_n\|_{L^2} \leq a_0 + (\beta_0 \lambda_0)^{1/2} \left(\frac{1-L^{n/2}}{1-L^{1/2}} \right) \end{array} \right.$$

de sorte que

$$(8) \quad \|w_n\|_{H^1(\Omega)} \leq (a_0 + b_0) + \lambda_0^{1/2} (\alpha_0^{1/2} + \beta_0^{1/2}) \left(\frac{1-L^{n/2}}{1-L^{1/2}} \right)$$

Ainsi si $0 < L < 1$ $L^{n/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et la suite (ω_n) converge dans $H^1(Q)$.

Nous pouvons donc affirmer qu'il existe un nombre L , que nous appellerons nombre critique, tel que la suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente pour

$$0 < L < 1$$

Ce nombre critique est lié au principe de mémoire évanescence et dépend des caractéristiques géométriques de l'appareil. La convergence de la suite (ω_n) est d'autre part liée (par la présence des termes a_0 et b_0) aux conditions initiale et aux limites qui ne doivent pas être "trop grandes". Il nous reste à montrer maintenant que

$\omega = \lim_{n \rightarrow +\infty} \omega_n$ satisfait aux conditions initiale et aux limites et à l'équation différentielle - fonctionnelle.

$$1^\circ) \quad \underline{\omega(R_1, t) = \Omega_1(t)}, \quad \underline{\omega(R_2, t) = \Omega_2(t)} \quad \underline{t > 0}$$

Ceci est évident puisque par construction

$$\omega^0(R_1, t) = \Omega_1(t), \quad \omega^0(R_2, t) = \Omega_2(t)$$

$$\text{et} \quad \omega^n(R_1, t) = \omega^n(R_2, t) = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et pour tout } t \in [0, T].$$

$$2^\circ) \quad \underline{\omega(r, t) = \omega_0(r, t)} \quad \text{pour} \quad \underline{t \leq 0}$$

Ceci résulte également de

$$\omega^0(r, t) = \omega_0(r, t) \quad t \leq 0$$

$$\omega^n(r, t) = 0 \quad t \leq 0 \text{ et } n \geq 1$$

$$3^\circ) \quad \omega \text{ est solution de l'équation I (22)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \int_{s=0}^{+\infty} (r \omega'(r, t-s)) \right] = \rho r^3 \dot{\omega}(r, t)$$

$$a) \quad \underline{\text{Convergence de } f_n \text{ vers } f \text{ dans } \mathcal{E}_1}$$

$$\text{Rappelons que } f_n(r, s, t) = \begin{cases} r \omega'_n(r, t-s) & 0 \leq s < t \\ r \omega'_0(r, t-s) & s \geq t \end{cases}$$

Nous poserons donc

$$(9) \quad f(r, s, t) = \begin{cases} r \omega'(r, t-s) & 0 \leq s < t \\ r \omega'_0(r, t-s) & s \geq t \end{cases}$$

Nous allons tout d'abord montrer que $f \in \mathcal{E}_1$.

Pour cela écrivons

$$f(r, s, t) = \bar{f}(r, s, t) + \hat{f}(r, s, t) \text{ avec } \hat{f}(r, s, t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq s < t \\ r w'_0(r, t-s) & s \geq t \end{cases}$$

Comme nous l'avons déjà remarqué $\hat{f} \in \mathcal{E}_1$

d'autre part

$$|||\bar{f}|||_{\mathcal{E}_1}^2 = \bar{\mu}_0 ||\bar{f}^2(\cdot, 0, \cdot)||_{L^2}^2 + \int_0^t h(s) ||\bar{f}(\cdot, s, 0)||_{L^2}^2 ds$$

La suite w_n est convergente dans $H^1(Q)$; il en résulte en particulier que

$$w' \in L^2(Q) \text{ d'où } ||w'||_{L^2}^2 \leq \beta^2 < +\infty.$$

De plus

$$\int_0^t h(s) ||\bar{f}(\cdot, s, \cdot)||_{L^2}^2 ds \leq R_2^2 \beta^2 H$$

d'où

$$|||\bar{f}|||_{\mathcal{E}_1}^2 \leq R_2^2 \beta^2 (\bar{\mu}_0 + H) < +\infty$$

ce qui montre que $\bar{f} \in \mathcal{E}_1$ et donc que $f \in \mathcal{E}_1$.

Démontrons à présent que

$$f_n \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{E}_1.$$

$$|||f_n - f|||_{\mathcal{E}_1}^2 = \bar{\mu}_0 ||f_n(0) - f(0)||_{L^2}^2 + \int_0^{+\infty} h(s) ||f_n(s) - f(s)||_{L^2}^2 ds$$

$$\text{où } f(s) = f(r, s, t).$$

Or

$$f_n(s) - f(s) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f^p(s) = \begin{cases} r \sum_{p=n+1}^{+\infty} w^{p'}(r, t-s) & 0 \leq s < t \\ 0 & \text{si } s > t \end{cases}$$

De plus, puisque $w_n \rightarrow w$ dans $H^1(Q)$

$$w'_n \rightarrow w \text{ dans } L^2(Q)$$

ou sous une forme équivalente

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} w^{p'} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ n} \rightarrow +\infty$$

Donc, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$

$$||f_n(s) - f(s)||_{L^2}^2 \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } s \in [0, t[$$

$$\Leftrightarrow ||f_n(s) - f(s)||_{L^2}^2 \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } s \in [0, +\infty[.$$

soit
$$\| \| f_n - f \| \|_{\mathcal{E}_1}^2 \leq (\mu_0 R_2^2 + R_2^2 H) \mathcal{E} \quad \text{pour } n \geq N$$

ce qui prouve que $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{E}_1$.

b) Convergence de $\mathcal{U}(f_n)$ vers $\mathcal{U}(f)$ dans $L^2(Q)$.

Rappelons qu'en supposant la différentielle de Fréchet d'ordre 1 de $\mathcal{U}$, continue sur $\mathcal{E}$ et bornée pour tout élément de $\mathcal{E}$, nous avons établi l'inégalité

$$\| \mathcal{U}(g+f) - \mathcal{U}(g) \|_{L^2} \leq \frac{M}{2} \| \| f \| \|_{\mathcal{E}_1}$$

Prenons dans cette inégalité

$g(s) = f(s)$ définie d'après (9) et qui appartient à $\mathcal{E}_1$.

et
$$f(s) = - \sum_{p=n+1}^{+\infty} f^p(s)$$

soit
$$g(s) + f(s) = \sum_{p=0}^n f^p(s) = f_n(s)$$

Nous obtenons alors

$$\| \mathcal{U}(f_n) - \mathcal{U}(f) \|_{L^2} \leq \frac{M}{2} \| \| f_n - f \| \|_{\mathcal{E}_1}$$

or d'après a)

$$\| \| f_n - f \| \|_{\mathcal{E}_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Rightarrow \| \mathcal{U}(f_n) - \mathcal{U}(f) \|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow (10) \quad \boxed{\mathcal{U}(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathcal{U}(f) \text{ dans } L^2(Q)}$$

c) Convergence de $\mathcal{L}_1(f_n; f^{n+1})$ vers 0 dans $L^2(Q)$

D'après l'inégalité (9) f_n demeure un compact de $\mathcal{E}_1$; en utilisant la même remarque que pour b) et l'inégalité portant sur $\mathcal{L}_1$ (II.1 (4)).

$$\| \mathcal{L}_1(f_n; f^{n+1}) \|_{L^2} \leq \frac{M}{2} \| \| f^{n+1} \| \|_{\mathcal{E}_1}$$

or d'après les inégalités (7)

$$\| \| f^{n+1} \| \|_{\mathcal{E}_1} \leq \frac{\lambda_0^{1/2} L^{n/2}}{M}$$

sous les hypothèses de convergence de la suite (w_n)

$$L^{n/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ d'où } \| \| f^{n+1} \| \|_{\mathcal{E}_1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui implique

$$(11) \quad \mathcal{L}_1(f_n; f^{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } L^2(Q)$$

d) Existence d'une solution (faible) de l'équation (I) (22)

Reprenons l'équation différentielle linéaire correspondant à ω^n , soit

$$(12) \quad [r^2 \mathcal{L}_1(f_n; f^{n+1})]' = \rho r^3 \dot{\omega}^{n-1}(r, t) + \varphi^n(r, t)$$

$$\text{où } \varphi^n(r, t) = -[r^2 \mathcal{U}(f_n)]' + \rho r^3 \dot{\omega}_n(r, t)$$

Or, lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$\omega_n \rightarrow \omega \text{ dans } H^1(Q)$$

d'où il résulte que

$$\dot{\omega}_n \rightarrow \dot{\omega} \text{ dans } \mathcal{D}'(Q) \text{ (espace des distributions sur } Q)$$

$$\mathcal{U}(f_n) \rightarrow \mathcal{U}(f) \text{ dans } L^2(Q) \text{ (d'après (10))}$$

d'où

$$[\mathcal{U}(f_n)]' \rightarrow [\mathcal{U}(f)]' \text{ dans } \mathcal{D}'(Q)$$

$$\omega^{n+1} \rightarrow 0 \text{ dans } H_0^1(Q)$$

d'où

$$\dot{\omega}^{n+1} \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q)$$

enfin

$$\mathcal{L}_1(f_n; f^{n+1}) \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(Q)$$

$$[r^2 \mathcal{L}_1(f_n; f^{n+1})]' \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(Q)$$

si l'on reporte ces divers résultats dans l'équation (12), on obtient ainsi l'existence d'une solution(faible) —

$$\text{de } \frac{\partial}{\partial r} [r^2 \overset{+\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}}(r \omega'(r, t-s))] = \rho r^3 \dot{\omega}(r, t)$$

$\omega \in H^1(Q)$ et vérifiant les conditions aux limites

$$\begin{cases} \omega(R_1, t) = \Omega_1(t) \\ \omega(R_2, t) = \Omega_2(t) \end{cases} \quad t > 0$$

et la condition initiale

$$\omega(r, t) = \omega_0(r, t) \quad t \leq 0 \quad r \in [R_1, R_2].$$

III.2 UNICITE DE LA SOLUTION

Proposition 4

Sous les hypothèses assurant l'existence de $w \in H^1(Q)$, solution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{+\infty}{\mathcal{U}} (r w' (r, t-s)) \right] = \rho r^3 \dot{w} (r, t)$$

qui vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} w(R_1, t) = \Omega_1(t) \\ w(R_2, t) = \Omega_2(t) \end{cases} \quad t > 0 \quad \text{et la condition initiale} \quad w(r, t) = w_0(r, t) \quad t \leq 0, r \in [R_1, R_2]$$

il y a unicité de la solution.

Démonstration

Raisonnons par l'absurde ; supposons qu'il existe $w_1, w_2 \in H^1(Q)$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 4.

Soit $w = w_1 - w_2$; w est donc identiquement nulle pour $r = R_1, r = R_2$ ($t > 0$) et pour $t \leq 0$ ($\forall r \in R_1, R_2$).

D'après l'hypothèse

$$(13) \quad \left[r^2 \left\{ \frac{+\infty}{\mathcal{U}} (r w'_1(r, t-s)) - \frac{+\infty}{\mathcal{U}} (r w'_2(r, t-s)) \right\} \right]' = \rho r^3 \dot{w} (r, t)$$

Posons

$$\begin{cases} f_1(s) = r w'_1(r, t-s) \\ f_2(s) = r w'_2(r, t-s) \end{cases} \quad \text{et } f(s) = f_1(s) - f_2(s)$$

Compte tenu de l'hypothèse de différentiabilité de $\mathcal{U}$, ajoutons aux deux membres de (13) $\mathcal{L}_1(f_2; f)$;

nous obtenons

$$\left[r^2 \mathcal{L}_1(f_2; f) \right]' = \rho r^3 \dot{w} (r, t) + \varphi(r, t)$$

$$\text{où} \quad \varphi(r, t) = - \left[r^2 \{ \mathcal{U}(f_1) - \mathcal{U}(f_2) - \mathcal{L}_1(f_2; f) \} \right]'$$

w vérifie donc une équation analogue à celle étudiée dans la partie précédente avec les mêmes conditions initiale et aux limites.

Les majorations effectuées dans III-1 (1) sont donc applicables à w .

$$\text{En particulier} \quad \|w'\|_{L^2}^2 \leq \theta_0 \|\mathfrak{F}\|_{L^2}^2$$

$$\text{où} \quad \mathfrak{F}(r, t) = r^2 [\mathcal{U}(f_1) - \mathcal{U}(f_2) - \mathcal{L}_1(f_2; f_1 - f_2)]$$

$$\text{or } \|f\|_{L^2}^2 \leq M^2 R_2^4 \|f\|_{\mathcal{E}_1}^2$$

$$\text{et } \|f\|_{\mathcal{E}_1}^2 \leq \frac{c_0}{\beta_0} \|w\|_{L^2}^2$$

il en résulte donc que

$$\|w'\|_{L^2}^2 \leq c_0 M^2 R_2^4 \|w'\|_{L^2}^2$$

ce qui implique

$$\underline{\underline{L = c_0 M^2 R_2^4 \geq 1}}$$

Or ceci est contraire à l'hypothèse d'existence de w_1 ($0 < L < 1$).

On a donc nécessairement $w \equiv 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{w^1 = w^2}}$. C. Q. F. D.

Après la partie consacrée à l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (I-22) il nous a paru indispensable de regrouper dans un seul énoncé toutes les hypothèses servant à démontrer ce résultat.

Le lecteur comprendra aisément qu'un tel théorème ne pouvait être placé au début de cette étude ; il nécessite en effet la connaissance de certaines notions qui auraient pu paraître artificielles si elles avaient été introduites au départ.

Théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'équation

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \int_{s=0}^{+\infty} (r w' (r, t-s)) \right] = \rho r^3 \frac{\partial w}{\partial t}$$

jointe à la condition initiale

$$(2) \quad w(r, t) = w_0(r, t) \quad t \leq 0 \quad r \in [R_1, R_2]$$

et aux conditions aux limites

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(R_1, t) = \Omega_1(t) \\ w(R_2, t) = \Omega_2(t) \end{array} \right\} \quad t > 0$$

Nous supposons que :

1) $\mathcal{U}$ est définie sur $\mathcal{E} = L^2(\mathcal{R}^+, \mu)$ et admet une différentielle de Fréchet d'ordre un sur $\mathcal{E}$; pour tout f et $g \in \mathcal{E}$, il existe donc un scalaire μ_g et une fonction $K_g(\cdot)$ tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(f+g) - \mathcal{U}(g) &= \mathcal{B}(g; f) + o(\|f\|_{\mathcal{E}}) \\ &= \mu_g f(0) + \int_0^{+\infty} K_g(s) f_r(s) ds + o(\|f\|_{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \mu_g = \mu(\{0\}) k_g(0) \\ K_g(s) = k_{g_r}(s) h(s) \end{array} \right.$$

2) $\mathcal{J}(\cdot; \cdot)$ est continue relativement à ses arguments et bornée sur $\mathcal{E}$.

Nous admettrons donc l'existence d'un nombre $M > 0$ tel que

$$\|\mathcal{J}(\cdot; \cdot)\| \leq \frac{M}{2} \quad \text{sur } \mathcal{E}$$

3) Pour tout $s \in [0, +\infty[$, la fonctionnelle $g \rightarrow K_g(s)$ est continue sur $\mathcal{E}$.

4) La restriction de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{E}_1$, soit $\mathcal{U}$, est à valeurs dans $H^1(Q)$.

5) Pour tout $g \in \mathcal{E}_1$, les fonctions $s \rightarrow K_g(s)$, $s \rightarrow -\frac{\partial K_g(s)}{\partial s}$, $s \rightarrow -\frac{\partial K_g(s)}{\partial s}$ sont continûment différentiables sur $I = [0, T]$ et possèdent sur I , des dérivées négatives croissantes.

6) Pour tout $g \in \mathcal{E}_1$, $t \rightarrow \mu_g$ est continûment différentiable sur I et, il existe un nombre $\mu_0 > 0$, tel que pour tout $t \in [0, T]$

$$\mu_g \geq \mu_0 > 0$$

7) le nombre

$$L = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^6 \frac{M^2}{\mu_0} [\mu(\{0\}) + \mu([0, +\infty[)]$$

est tel que $0 < L < 1$

8) les fonctions $t \rightarrow \Omega_1(t)$, $t \rightarrow \Omega_2(t)$ sont dérivables sur $[0, T]$ et $\dot{\Omega}_1(\cdot)$, $\dot{\Omega}_2(\cdot)$ appartiennent à $L^2([0, T])$.

9) La fonction $(r, t) \rightarrow w_0(r, t)$, définie sur Q , est telle que $f_0(\cdot)$ et $g_0(\cdot)$ définies par

$$f_0(s) = \begin{cases} w'_0(r, t-s) & T < s < +\infty \\ 0 & 0 \leq s \leq T \end{cases}$$

$$g_0(s) = \begin{cases} w''_0(r, t-s) & T < s < +\infty \\ 0 & 0 \leq s \leq T \end{cases}$$

appartiennent à $\mathcal{E}_1$.

Alors il existe une solution (faible) unique w , telle que $w \in L^2(Q)$, $w' \in L^2(Q)$ qui satisfait à l'équation (1) et qui vérifie les conditions initiale et aux limites (2) et (3).

A partir de la fonction ω définissons

$$f(s) = r \omega'(r, t-s); \quad f \in \mathcal{E}_1 \text{ d'après ce qui précède.}$$

De même posons

$$(17) \quad f_d(s) = \begin{cases} r d'(r, t-s) & 0 \leq s \leq t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

Nous pourrions remarquer que $f_d \in \mathcal{E}_1$ puisque $f \in \mathcal{E}_1$ et que $r \bar{\omega}'(\cdot) \in \mathcal{E}_1$.

Par hypothèse ω est solution de

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial s} (r \omega'(r, t-s)) \right] = \rho r^3 \dot{\omega}(r, t)$$

$\bar{\omega}$ est solution de

$$\frac{d}{dr} [r^2 \nu(\bar{\kappa})] = 0 \quad \text{de sorte que l'on peut écrire}$$

$$[r^2 \mathcal{L}_1(\bar{\kappa}; f_d)]' = \rho r^3 \dot{d}(r, t) + [r^2 \{ \nu(\bar{\kappa}) + \mathcal{L}_1(\bar{\kappa}; f_d) - \mathcal{U}(f_d + \bar{\kappa}) \}]'$$

Nous retrouvons ainsi une équation vérifiée par d , du même type que celle étudiée dans la partie II-5). Nous pourrions donc reprendre les estimations à priori, portant sur cette équation, et effectuée dans III.1.1). La seule différence tient au fait que $d(r, 0) = -\bar{\omega}(r)$.

En particulier

$$\|d'\|_{L^2}^2 \leq \beta_0 \|\bar{\Phi}\|_{L^2}^2 + \frac{\rho}{2} \|r^{3/2} \bar{\omega}\|^2$$

(le dernier terme provient de $\int_{R_1}^{R_2} \left(\int_0^T r^3 d(r, t) \dot{d}(r, t) dt \right) dr$)

$$\text{Or} \quad \|\bar{\Phi}\|_{L^2}^2 = \|r^2 \{ \nu(\bar{\kappa}) + \mathcal{L}_1(\bar{\kappa}; f_d) - \mathcal{U}(f_d + \bar{\kappa}) \}\|_{L^2}^2 \leq M^2 R_2^4 \|f_d\|_{\mathcal{E}_1}^2$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|f_d\|_{\mathcal{E}_1}^2 &\leq \bar{\mu}_0 \|d'\|_{L^2}^2 + \int_0^T h(s) ds \|d'\|_{L^2}^2 \\ &= (\bar{\mu}_0 + H) \|d'\|_{L^2}^2 R_2^2 \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|d'\|_{L^2}^2 \leq \beta_0 M^2 R_2^4 (\bar{\mu}_0 + H) R_2^2 \|d'\|_{L^2}^2 + \frac{\rho}{2} \|r^{3/2} \bar{\omega}\|^2$$

or

$$\beta_0 M^2 R_2^4 (\bar{\mu}_0 + H) R_2^2 = \beta_0 M^2 R_2^4 \frac{c_0}{R_2^2 \beta_0} R_2^2 = L$$

d'où

$$\|d'\|_{L^2}^2 (1-L) \leq \frac{\rho}{2} \|r^{3/2} \bar{w}\|^2$$

Or par hypothèse d'existence : $0 < L < 1$; il existe donc un nombre c , indépendant de T , tel que

$$\int_0^T \|d'(\cdot, u)\|^2 du \leq c < +\infty \quad \text{et ceci } \forall T > 0.$$

Cette inégalité implique que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|d'(\cdot, t)\| = 0$$

ou, sous une forme équivalente

$$w'(r, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{w}'(r) \quad \text{dans } L^2(I) \quad \text{pour presque tout } r \in [R_1, R_2]$$

De plus, puisque $w(R_1, t) = \bar{w}(R_1)$

$$w(r, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{w}(r) \quad \text{dans } L^2(I) \quad (p.p)$$

d'où

$$w \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \bar{w} \quad \text{dans } H^1(I)$$

c. q. f. d.

APPLICATION

Détermination des fonctions de relaxation d'un fluide simple

Il est à prévoir que la méthode de résolution exposée ci-dessus s'appliquera à différents types d'équations aux dérivées partielles non linéaires rencontrées, non seulement en mécanique, mais dans d'autres domaines de la physique.

Nous ne donnerons ici qu'une de ces applications, qui porte sur l'étude des écoulements non stationnaires surimposés à un écoulement viscométrique donné.

Nous avons porté notre attention sur deux types particuliers de mouvement : mouvement plan-cône et écoulement de cisaillement simple ; et ceci, pour deux raisons essentielles : nous voulions d'une part prouver que l'étude précédente n'est nullement liée au type d'écoulement choisi (mouvement de Couette), et d'autre part, montrer comment la méthode de résolution développée, permettait l'accès aux différentes fonctions de relaxation $K(.,.)$.

IV.1. MOUVEMENT PLAN - CONE

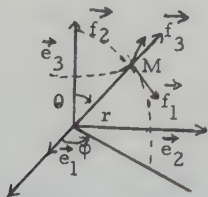
IV.1.1 Equations Générales

Considérons un écoulement de fluide simple dont les composantes contravariantes de la vitesse sont données par

$$\dot{x}^1 = 0, \quad \dot{x}^2 = \omega(x^1, t), \quad \dot{x}^3 = 0$$

où $x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = r$ (coordonnées sphériques) ; les composantes de la vitesse sont rapportées à la base naturelle $(\vec{e}_i)$ à laquelle nous associons la base orthonormée

$$\vec{f}_i = \frac{1}{\varrho_i} \vec{e}_i \quad (\text{sans sommation})$$



les composantes diagonales du tenseur métrique fondamental sont

$$g_{11} = r, \quad g_{22} = r \sin \theta, \quad g_{33} = 1$$

et sont donc constantes le long des trajectoires des particules définies par

$$\begin{cases} r \sin \theta = c_1 \\ r = c_2 \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un écoulement viscométrique curvilinéal (cf I. I. 4). Le tenseur gradient de déformations relatives est, dans ce cas, donné par

$$\tilde{E}_t(z) = \tilde{1} - \left(\int_t^z \omega'(\theta, \sigma) d\sigma \right) \sin \theta \tilde{M}$$

où $\omega'(\theta, \sigma) = \frac{\partial \omega}{\partial \theta}(\theta, \sigma)$ et $\tilde{M}$ est le tenseur dont la matrice $[\tilde{M}]$, relativement à la base $(\vec{f}_i)$, est donnée par

$$[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

l'histoire du gradient de déformations relatives s'écrit donc

$$\tilde{F}(s) = \tilde{1} - g(s) \tilde{M}$$

avec

$$g(s) = \sin \theta \int_0^s \omega'(\theta, t-\sigma) d\sigma$$

Les composantes du tenseur des contraintes relativement à la base $(\vec{f}_i)$ s'écrivent alors (cf. I-1 (4) (16))

$$\begin{cases} T^{12}(\theta, t) = \frac{+\infty}{-}^* (g(s)) = \frac{+\infty}{-} (f(s)) = \omega'(\theta, t-s) \sin \theta \\ T^{11}(\theta, t) - T^{22}(\theta, t) = T_{(\theta, t)}^{<0, 0>} - T_{(\theta, t)}^{<\varphi, \varphi>} = \frac{+\infty}{-}^* (g(s)) = \frac{+\infty}{-} (f(s)) \\ T^{11}(\theta, t) - T^{33}(\theta, t) = T_{(\theta, t)}^{<r, r>} = \frac{+\infty}{-}^* (g(s)) = \frac{+\infty}{-} (f(s)) \\ T^{23}(\theta, t) = T^{13}(\theta, t) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons alors reporter les valeurs du tenseur $\tilde{T}$ dans les équations fondamentales de la dynamique ;

la projection de celles-ci sur $\vec{f}_i$, donne ainsi l'équation différentielle fonctionnelle qui régit le mouvement du milieu considéré, soit

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{+\infty}{-} (\omega'(\theta, t-s) \sin \theta) \right] + 2 \cotg \theta \frac{+\infty}{-} (\omega'(\theta, t-s) \sin \theta) = \rho r^3 \omega(\theta, t) \sin \theta$$

ou sous une forme équivalente

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin^2 \theta \frac{+\infty}{-} (\omega'(\theta, t-s) \sin \theta) \right] = \rho r^3 \omega(\theta, t) \sin^3 \theta$$

A cette équation, nous adjoindrons les conditions aux limites

$$\left. \begin{array}{l} \theta = \theta_1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \quad \omega(\theta, t) = \left. \begin{array}{l} \Omega_c(t) \\ \Omega_p(t) \end{array} \right\} t > 0 \quad \begin{array}{l} \text{(conditions d'adhérence à la paroi} \\ \text{conique de demi-angle au sommet} \\ \theta_1, \text{ et au plan)} \end{array}$$

et la condition initiale

$$\omega(\theta, t) = \omega_0(\theta, t) \quad t \leq 0.$$

Il apparait de suite qu'une équation telle que (1), indépendamment des conditions imposées à la solution (sauf des conditions identiquement nulles entraînant $\omega = 0$), ne peut admettre la solution. En effet sous une forme équivalente (1) s'écrit

$$(2) \quad r^3 = \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin^2 \theta \int_{s=0}^{+\infty} (\omega'(\theta, t-s) \sin \theta) \right]}{\rho \dot{\omega}(\theta, t) \sin^3 \theta}$$

Or ρ , masse volumique du fluide, est supposée indépendante, des coordonnées d'espace ; le second membre de (2) étant indépendant de r , ne peut donc égaler r^3 .

Nous retrouvons ici un résultat semblable à celui signalé par W. Noll [1] p. 51, et qui prouve qu'un écoulement viscométrique tel que celui considéré ici n'est pas possible en général. Ceci avait été démontré par W. Noll à l'aide de considérations sur les contraintes normales apparaissant au sein du milieu.

Toutefois, en négligeant l'inertie du fluide, on peut s'assurer de l'existence d'une solution approchée du problème. Cette approximation, déjà faite dans d'autres études, a été confirmée par l'expérience pour des conditions aux limites "assez régulières".

Nous la reprendrons ici. Compte-tenu de cette remarque, l'équation (1) peut s'écrire

$$(3) \quad \boxed{\int_{s=0}^{+\infty} (\omega'(\theta, t-s) \sin \theta) = \frac{c(t)}{\sin^2 \theta}}$$

l'étude qui va suivre portera donc sur l'équation (3).

IV.1.2 Surimposition d'un mouvement non stationnaire à l'écoulement viscométrique précédent

IV.1.2.1 Equation du mouvement

Reprenons les conditions aux limites imposées à la solution ω de (1) et supposons que

$$(4) \quad \left. \begin{array}{l} \Omega_c(t) = \Omega_0^1 + \Omega_1(t) \\ \Omega_p(t) = \Omega_0^2 \end{array} \right\} t > 0 \quad \text{et} \quad \omega_0(\theta, t) = \left. \begin{array}{l} \Omega_0^1 \text{ pour } \theta = \theta_1 \\ \Omega_0^2 \text{ pour } \theta = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} t \leq 0 \quad (5)$$

c'est-à-dire qu'à partir de l'instant initial ($t=0$) nous animons le cône d'un mouvement caractérisé par la fonction $t \rightarrow \Omega_1(t)$. Nous poserons naturellement

$$\omega(\theta, t) = \omega_0(\theta) + \omega_1(\theta, t)$$

ω_1 vérifiant les conditions

$$(6) \quad \omega_1(\theta, t) = \begin{cases} \Omega_1(t) & \text{pour } \theta = \theta_1 \\ 0 & \text{" } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad t > 0 \text{ et } \dot{\omega}_1(\theta, t) = 0 \quad t \leq 0.$$

La fonction $\omega_0(\theta)$ est d'après les conditions imposées, solution de l'écoulement viscométrique stationnaire correspondant aux conditions (5); nous savons d'ailleurs l'expliquer [1] p. 51.

$$(7) \quad \omega_0(\theta) = \frac{\Omega_1^0 - \Omega_2^0}{\theta_1 - \frac{\pi}{2}} \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + \Omega_2^0$$

Introduisons les fonctions f, f_0, f_1 associées à $\omega, \omega_0, \omega_1$ telles que

$$f(s) = f_0(s) + f_1(s)$$

$$(8) \quad \begin{cases} f_0(s) = \omega'_0 \sin \theta = \left(\frac{\Omega_1^0 - \Omega_2^0}{\theta_1 - \frac{\pi}{2}} \right) \sin \theta & \text{pour tout } s \in [0, +\infty[\\ f_1(s) = \omega'_1(\theta, t-s) & s \in [0, +\infty[\\ f(s) = \omega'(\theta, t-s) & \text{"} \end{cases}$$

l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation (I-(22)) reposaient essentiellement sur les hypothèses de différentiabilité de la fonctionnelle $\mathcal{U}$. Nous les reprendrons ici; compte-tenu de la décomposition (8) nous pouvons écrire

$$(9) \quad \mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(f_0) + \mathcal{J}_1(f_0; f_1) + \theta(\|f_1\|) \mathcal{E}_1^*$$

où $\mathcal{E}_1^*$ est l'espace fonctionnel analogue à $\mathcal{E}_1$ où il convient de remplacer r par θ , R_1 par θ_1 , R_2 par $\theta_2 = \pi/2$.

Suivant ici la méthode de résolution de l'équation I-(22) nous rechercherons ω_1 , solution de l'équation différentielle fonctionnelle obtenue en approchant $\mathcal{U}$ par la fonctionnelle linéaire tangente au point f_0 considéré, de sorte que

$$(10) \quad \mathcal{U}(f_0) + \mathcal{J}_1(f_0; f_1) = \frac{c(t)}{\sin^2 \theta}$$

avec $\mathcal{U}(f_0) = \frac{c_0}{\sin^2 \theta}$, c_0 étant déterminée par les conditions aux limites Ω_0^1, Ω_0^2 .

Sous forme équivalente, (10) peut ainsi s'écrire

$$\mathcal{L}_1(f_0; f_1) = \frac{c(t) - c_0}{\sin^2 \theta} = \frac{c_1(t)}{\sin^2 \theta}$$

le théorème de représentation des fonctionnelles linéaires permet ici encore d'explicitier $\mathcal{L}_1$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(f_0; f_1) &= \mu_{f_0} f_1(0) + \int_0^{+\infty} K_{f_0}(s) f_{1r}(s) ds \\ &= \mu_{f_0} w_1'(\theta, t) \sin \theta + \int_0^{+\infty} K_{f_0}(s) w_1'(\theta, t-s) \sin \theta ds \end{aligned}$$

Mais comme le montre la définition de w_0 , le gradient de vitesse $w_0'(\theta)$ ne dépend pas des coordonnées d'espace, ni du temps, de sorte que nous pourrions poser

$$\begin{cases} \mu_{f_0} = \mu_0 \\ K_{f_0}(s) = K_0(s) \quad s \in]0, +\infty[\end{cases}$$

De plus, la condition initiale imposée à w_1 permet d'écrire

$$\mathcal{L}_1(f_0; f) = \mu_0 w_1'(\theta, t) \sin \theta + \int_0^t K_0(s) w_1'(\theta, t-s) \sin \theta ds$$

de sorte que l'équation qui détermine w_1 se ramène à

$$(11) \quad \mu_0 w_1'(\theta, t) + \int_0^t K_0(s) w_1'(\theta, t-s) ds = \frac{c_1(t)}{\sin^3 \theta}$$

IV. 1. 2. 2 Etude du champ des vitesses

Intégrons la relation (11) entre θ_2 et θ ;

$$(12) \quad \mu_0 w_1(\mu, t) + \int_0^t K_0(s) w_1(\theta, t-s) ds = c_1(t) \int_{\theta_2}^{\theta} \frac{du}{\sin^3 u}$$

soit pour $\theta = \theta_1$

$$c_1(t) = \frac{\mu_0 \Omega_1(t) + \int_0^t K_0(s) \Omega_1(t-s) ds}{\int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{du}{\sin^3 u}}$$

$$(13) \quad c_1(t) = 2 \frac{[\mu_0 \Omega_1(t) + \int_0^t K_0(s) \Omega_1(t-s) ds]}{\text{Log tg } \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1}}$$

Après la détermination de cette constante d'intégration la relation (12) donne l'équation fonctionnelle vérifiée par w_1 soit

$$\mu_0 w_1(\theta, t) + \int_0^t K_0(s) w_1(\theta, t-s) ds = \frac{\text{Log tg } \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}}{\text{Log tg } \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1}} (\mu_0 \Omega_1(t) + \int_0^t K_0(s) \Omega_1(t-s) ds)$$

d'où il résulte que

$$(14) \quad w_1(\theta, t) = \Omega_1(t) \frac{\text{Log tg } \frac{\theta}{2} - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}}{\text{Log tg } \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1}}$$

Remarque l'expression précédente permet de calculer $|||f_1|||_{\mathcal{E}_1^*}$. En effet

$$\begin{aligned} |||f_1|||_{\mathcal{E}_1^*}^2 &= \mu_0 ||f_1(\cdot, \dots, 0)||_{L^2}^2 + \int_0^{+\infty} h(s) ||f_1(\cdot, \dots, -s)||_{L^2}^2 ds \\ &\leq (\frac{\pi}{2} - \theta_1) [\mu_0 ||\Omega_1||_{L^2(]0, t[)}^2 + \int_0^T h(s) ||\Omega_1(\cdot - s)||_{L^2(]0, T[)}^2 ds] \end{aligned}$$

De sorte que si la demi ouverture du cône reste voisine de $\pi/2$ (hypothèse qui est à la base de l'existence de l'écoulement viscométrique stationnaire) et si $\Omega_1(\cdot)$ reste uniformément bornée par $\mathcal{E}$ sur $[0, +T]$

$$|||f_1|||_{\mathcal{E}_1^*}^2 \leq (\frac{\pi}{2} - \theta_1) \mathcal{E}^2 (\mu_0 + H) T$$

On peut donc admettre, que si le mouvement surimposé est de très faible amplitude et si l'espace rempli par le fluide est petit, la valeur des contraintes tangentielles qui apparaissent dans ce milieu est donnée par

$$\mathcal{U}(f) = \mathcal{U}(f_0) + \mathcal{L}_1(f_0; f_1)$$

$$(15) \quad \begin{cases} f_0(s) = w'_0(\theta) \sin \theta = \left(\frac{\Omega_1^0 - \Omega_2^0}{\theta_1 - \frac{\pi}{2}} \right) \sin \theta \\ f_1(s) = \frac{2\Omega_1(t-s)}{\text{Log tg } \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{cases}$$

IV. I. 2. 3 Application à la détermination des fonctions de relaxation

Dans tout ce qui précède, le raisonnement est fait à partir de la fonctionnelle linéaire tangente au voisinage de l'écoulement viscométrique stationnaire caractérisé par w_0 . Or cette fonctionnelle dépend de μ_0 , viscosité locale définie à partir de l'histoire f_0 , et de $K_0(\cdot)$, fonction qui traduit l'influence du passé cinématique sur le comportement présent. Tant que l'on considère cette étude sous l'aspect mathématique ces paramètres n'ont nullement besoin d'être précisés ; par contre, dès que l'on s'intéresse aux valeurs des contraintes tangentielles au sein du milieu en mouvement il devient nécessaire de déterminer ces grandeurs. Nous allons montrer ici comment la connaissance du couple agissant sur la surface latérale du cône de demi-ouverture θ_1 permet une telle détermination.

L'utilisation combinée des relations (3) et (15)₁ permet d'écrire

$$\vec{U}(t) = \vec{U}(f_0) + \vec{L}_1(f_0; f_1) = \frac{c(t)}{\sin^2 \theta} = T^{12}(\theta, t)$$

Par ailleurs, le vecteur force par unité de surface qui s'exerce sur la surface latérale du cône de demi-ouverture θ_1 , (Σ) , est relié au tenseur des contraintes et au vecteur unitaire normal à (Σ) par

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{T}(\vec{x}, t) \vec{n}$$

Il admet donc pour composantes sur la base (f_i)

$$\vec{[f]} = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & 0 \\ T^{12} & T^{22} & 0 \\ 0 & 0 & T^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{11} \\ T^{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi les frottements d'origine visqueuse exercent sur (Σ) un couple dont le moment par rapport à l'axe du système est

$$M(t) = \int_{(\Sigma)} T^{12}(\theta_1, t) r^2 \sin^2 \theta_1 dr d\varphi = \frac{2\pi}{3} R_1^3 c(t) \quad (R_1 \text{ rayon du cercle de base du cône})$$

soit

$$M(t) = \frac{2\pi R_1^3}{3} c(t)$$

Désignons par $M(0)$ le couple qui s'exerce sur (Σ) pour $t \leq 0$; il est clair que

$$M(0) = \frac{2\pi R_1^3}{3} c_0 \quad (\text{cf (10)})$$

d'où

$$M(t) - M(0) = \frac{2\pi R_1^3}{3} [c(t) - c_0] = \frac{2\pi}{3} R_1^3 c_1(t)$$

Ainsi si l'on dispose d'une méthode quelconque de mesure du couple $M(t) - M(0)$ on peut déterminer $c_1(t)$ par

$$(16) \quad c_1(t) = \frac{3}{2\pi R_1^3} [M(t) - M(0)]$$

Reprenons alors la relation (13) sous la forme

$$\mu_0 \Omega_1(t) + \int_0^t K_0(s) \Omega_1(t-s) ds = \frac{1}{2} c_1(t) \left[\log \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} \right]$$

Compte tenu de (16), μ_0 et $K_0(\cdot)$ apparaissent donc comme solutions de l'équation fonctionnelle

$$(17) \quad \mu_0 \Omega_1(t) + \int_0^t K_0(s) \Omega_1(t-s) ds = \frac{1}{2} \left[\log \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} \right] \times \frac{3[M(t) - M(0)]}{2\pi R_1^3}$$

Cette équation se résout sans difficulté (par exemple par transformation de Laplace). Donnons ici un exemple.

Supposons que $\Omega_1(t) = \mathcal{E} \sin \lambda t$; un calcul élémentaire montre que

$$(18) \quad \begin{cases} K_0(t) = \frac{3\mathcal{E}}{\pi R_1^3} \left[\log \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} \right] \left[\lambda [M(t) - M(0)] + \frac{1}{\lambda} \dot{M}(t) \right] \\ \mu_0 = \frac{3\mathcal{E}}{\pi R_1^3} \left[\log \operatorname{tg} \frac{\theta_1}{2} - \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} \right] \frac{\dot{M}(0)}{\lambda} \end{cases}$$

Ces formules permettent donc de déterminer expérimentalement les fonctions $K_0(\cdot)$ et la viscosité instantanée μ_0 . Nous réalisons actuellement de telles expériences dans nos laboratoires.

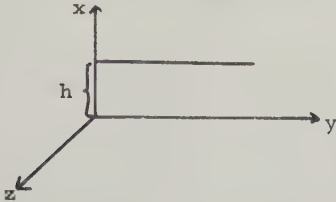
Remarque

On peut s'attendre à une certaine imprécision dans la détermination de ces fonctions matérielles de par le fait même que l'on considère des écoulements non stationnaires pour lesquels l'inertie est négligée.

Il nous a semblé important de reprendre ce problème pour un écoulement où l'on tient compte de l'inertie, afin de montrer que si celle-ci devient négligeable, la solution du problème complet tend vers la solution du problème obtenu en posant $\rho = 0$ dans les équations du mouvement.

IV.II - ECOULEMENT DE CISAILLEMENT SIMPLE

Il s'agit ici d'un écoulement entre deux plans parallèles (cf. figure)



pour lequel $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = u(x, t)$, $\dot{z} = 0$

Nous n'insisterons pas sur le détail des calculs qui se mènent de la même façon que précédemment ; l'équation régissant le champ de vitesse est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial s} (u'(x, t-s)) \right] = \rho \dot{u}(x, t) \quad (u' = \frac{\partial u}{\partial x})$$

Comme dans l'exemple précédent considérons u sous la forme

$$u(x, t) = u_0(x) + u_1(x, t)$$

$$u_0(x) = \begin{cases} U_0 & x = h \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad u_0 \text{ étant solution de l'écoulement viscométrique}$$

stationnaire ($\frac{d}{dx} [\tau(u'_0)] = 0$) c'est-à-dire

$$u_0(x) = \frac{x}{h} U_0 \text{ (cf. W. Noll [1] p. 47)}$$

Cherchons $u_1(x, t)$ telle que

$$u_1(x, t) \begin{cases} U_1 & x = h \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad t > 0 \text{ et } u_1(x, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 0$$

Le même raisonnement que celui développé ci-dessus montre que la détermination de u_1 est liée à la recherche de la solution de

$$\mu_0 u''(x, t) + \int_0^t K_0(s) u''(x, t-s) ds = \rho \dot{u}(x, t)$$

qui vérifie les conditions initiale et aux limites précédentes. Désignons par u^* la solution de

$$u''(x, t) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = 0 \\ u(h, t) = U_1 \end{array} \right\} \quad t \geq 0 \text{ et } u(x, t) = 0, \quad t < 0$$

Il est clair que

$$u^*(x, t) = \begin{cases} \frac{x}{h} U_1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Posons $d(x, t) = u(x, t) - u^*(x, t)$

d est alors pour $t > 0$, solution de

$$(19) \quad \mu_0 d''(x, t) + \int_0^t K_0(s) d''(x, t-s) ds = \rho \dot{d}(x, t)$$

$$\begin{cases} d(0, t) = 0 \\ d(h, t) = 0 \end{cases} t > 0 \quad d(x, 0) = -u^*(x, 0) = -\frac{x}{h} U_1$$

Multiplions scalairement la relation (19) par d et intégrons cette dernière entre 0 et h et 0 et t (pour justifier la validité de ces calculs cf. III-1) ; nous obtenons

$$-\mu_0 \int_0^t \left(\int_0^h (d'^2(x, \xi) dx) d\xi - \int_0^t \left(\int_0^h (d'(x, \xi) \int_0^\xi K_0(s) d'(x, \xi-s) ds) dx \right) d\xi \right. \\ \left. = \frac{\rho}{2} \int_0^h d^2(x, t) dx - \frac{\rho}{2} \int_0^h u^{*2}(x, 0) dx \right.$$

ce qui compte-tenu des inégalités de l'énergie démontrées précédemment, permet d'écrire

$$\mu_0 \int_0^t \left(\int_0^h d'^2(x, \xi) dx \right) d\xi \leq \frac{\rho}{2} \int_0^h u^{*2}(x, 0) dx \quad \forall t \in [0, T]$$

or si $\rho \rightarrow \frac{\rho}{2} \int_0^h u^{*2}(x, 0) dx = \frac{\rho}{6} h U_1^2 \rightarrow 0$

Il en résulte que si $\rho \rightarrow 0$ $d'(\cdot, t) \rightarrow 0$ dans $L^2([0, h])$ pour presque tout $t \in [0, T]$.

Or $d(h, t) = 0$; on déduit donc que

$d(\cdot, t) \rightarrow 0$ dans $L^2([0, h])$ pour presque tout $t \in [0, T]$ ce qui démontre que

$$u(x, t) \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} u^*(x, t) = u^*(x) \text{ dans } H^1(Q)$$

$$Q =]0, h[\times]0, T[$$

c'est-à-dire que l'on obtient la convergence de la solution du problème complet vers la solution du problème à inertie négligeable.

Cette démonstration contient en particulier le résultat important suivant : si l'inertie du fluide joue un rôle négligeable le champ des vitesses au sein du fluide correspondant à un écoulement surimposé s'identifie quasi instantanément à celui qui résulte du régime stationnaire correspondant.

Cette remarque permet alors d'envisager la détermination de fonctions de relaxation pour d'autres types d'écoulement que le mouvement plan-cône (en particulier le cas du cisaillement simple ou celui de Couette).

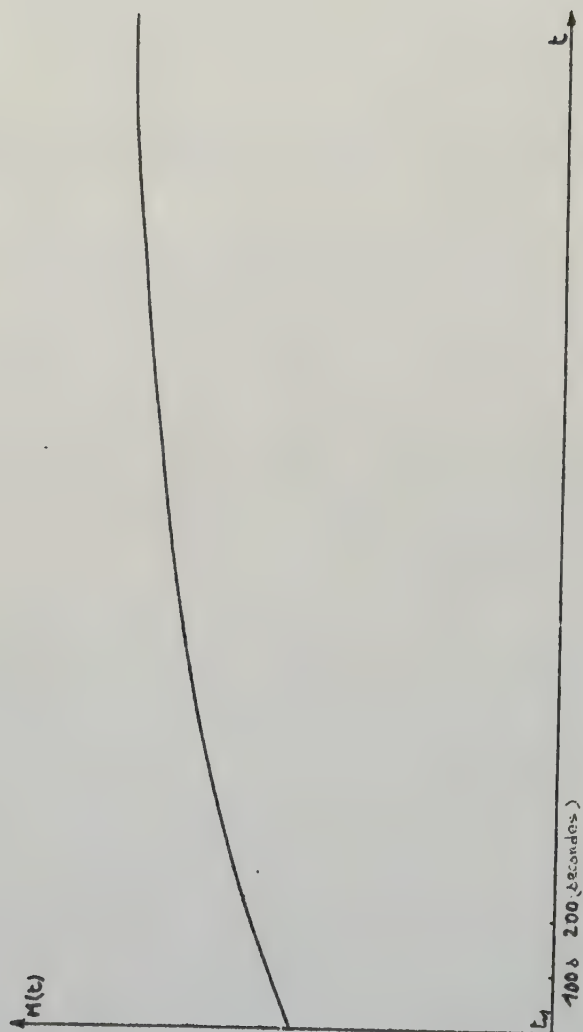
Signalons ici une série d'expériences que nous avons effectuées pour le cas d'un mouvement de Couette et mettant en évidence le rôle joué par la fonction de relaxation.

Nous avons utilisé comme fluide simple, un haut polymère, l'arochlore, à 90° sous les conditions expérimentales suivantes

$$R_1 = 1.1 \text{ cm}, \quad R_2 = 2.1 \text{ cm}, \quad \Omega_0^1 = 50 \text{ rad/s}, \quad \Omega_0^2 = 0$$

$$\Omega_1 = + 2/3 \Omega_0^1$$

Nous reproduisons ici la courbe d'établissement des contraintes tangentielles au cours du temps. Il y apparait nettement que celles-ci ne s'établissent qu'au bout d'un temps très long, bien au delà de la zone d'influence de l'inertie.



Courbe extraite de M. LUCIUS - Thèse 3ième Cycle Université de Nancy (1967)

CONCLUSION

Ce mémoire propose une étude théorique des équations différentielles fonctionnelles qui régissent les écoulements viscométriques non stationnaires de fluides simples.

L'attention est ainsi portée sur une classe de phénomènes évolutifs apparaissant en mécanique des milieux continus non linéaires.

Du fait de la non linéarité de l'équation étudiée, les résultats connus à ce jour, et dont l'utilisation aurait pu conduire à l'existence d'une solution du problème, se sont avérés inapplicables. Il a ainsi fallu concevoir une nouvelle méthode de résolution, qui s'apparente certes, aux méthodes classiques d'approximations successives, mais en diffère sensiblement par l'approche que l'on fait, non seulement de la solution, mais aussi de l'opérateur différentiel qui intervient dans cette équation.

L'intérêt de celle-ci se situe d'une part dans le théorème d'existence auquel nous aboutissons, et, d'autre part, dans la construction même de la solution qu'elle permet de réaliser.

L'importance du principe de mémoire évanescence, proposé par W. Noll, apparaît nettement ici, et c'est en s'appuyant sur ces conséquences que nous avons pu, non seulement développer notre travail, mais aussi aborder l'étude des phénomènes d'hérédité gouvernés par des équations aux dérivées partielles linéaires.

Dans ce mémoire apparaissent de façon naturelle des considérations sur l'énergie dissipée par frottement interne au sein du milieu en mouvement. Nous avons obtenu, à ce propos, certaines inégalités originales dont l'intérêt est certain en viscoélasticité linéaire finie.

En dehors de ces résultats obtenus et qui sont liés à la nature même du problème envisagé, nous pensons que la partie théorique développée ci-dessus doit permettre l'étude d'une classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires, apparaissant non seulement en mécanique, mais dans d'autres domaines de la physique.

Le développement de la seconde partie de ce travail est nécessité par l'origine mécanique du problème.

Il est en effet important de signaler la différence entre les aspects mécanique et mathématique d'une telle étude. Du point de vue mathématique, toutes les fonctions ou fonctionnelles qui apparaissent dans la recherche de la solution sont supposées connues. En pratique il n'en est pas ainsi et leur détermination doit être envisagée expérimentalement. Un mode d'accès à ces grandeurs fait justement l'objet du dernier chapitre.

La détermination des fonctions matérielles de relaxation peut se faire à partir de la superposition de petits mouvements à un écoulement viscométrique stationnaire donné. Pour cela nous avons proposé deux méthodes l'une, relative, aux écoulements à inertie négligeable (plan-cône, écoulement de torsion...), l'autre relative aux écoulements tels que celui de Couette, où, bien que l'inertie intervienne, nous pouvons encore accéder à ces fonctions par un choix judicieux des conditions aux limites.

La mise au point d'un dispositif de mesure doit nous permettre d'envisager l'étude d'une vaste gamme de fluides non newtoniens et de rechercher la limite de validité de la théorie présentée ici.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] COLEMAN - MARKOVITZ - NOLL
"Viscometric Flows of non-newtonian Fluids"
Springer Verlag - Berlin - Heidelberg - New York (1966).
- [2] H. MARKOVITZ
"Normal stress measurements on polymer solutions"
Proc. Fourth international Congress - Rheology (1963) 1-
p. 189 - 212.
- [3] J. C. ROTH
"Contribution à l'étude des fonctions viscométriques des fluides
non newtoniens en mouvement stationnaire"
These 3eme cycle Université de Nancy (à paraître)
- [4] B. D. COLEMAN et M. E. GURTIN
"On the stability against shear waves of steady flows of non-linear
viscoelastic fluids"
Journal of Fluid Mechanics (1968) 33 - (1) p. 165 - 181.
- [5] R. HERRERA
Article communiqué par J. L. LIONS
Arch. Rational Mechanics and Analysis (référence à compléter).
- [6] M. LUCIUS
C. R. Académie Sciences de Paris t. 268 p. 1210 - 1213 série A.
- [7] C. TRUESDELL et W. NOLL
"The non linear Fields theories of Mechanics"
In the Encyclopedia of Physics, Vol. III/3, edited by
S. Flügge Springer-Verlag (1965).
- [8] W. NOLL
"Euclidean geometry and Minkowskian chronometry"
American Math. Monthly 71 p. 129 - 144 (6).
- [9] "Simple fluids with Fading Memory"
Second order in Elasticity - Plasticity and Fluid Mechanics
International symposium Haifa (1962) Pergamon-Press
p. 530-552.
- [10] B. D. COLEMAN et V. MIZEL
"Norms and semi-groups in the theory of Fading Memory"
Arch. Rational Mechanics and Analysis - 23 p. 87-123 (1966)
- [11] F. RIESZ et B. SZ. NAGY
"Leçons d'Analyse Fonctionnelle"
Gauthier-Villars Paris 1968 p. 110

[12] J. L. LIONS

"Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites"
Springer-Verlag - Berlin - Göttingen - Heidelberg (1961)

[13] H. CARTAN

"Calcul différentiel"
Hermann - Paris p. 63-65 (1968)

TABLE DES MATIERES

	Pages
Notations	N1
Introduction	1
<u>CHAPITRE I</u>	
I-1 Rappels concernant les fluides simples	3
I. 1. 6 Equations de la dynamique	7
<u>CHAPITRE II</u>	
II-1 Principe de mémoire évanescence - Espaces fonctionnels	10
II-2 Exposé de la méthode de résolution de l'équation différentielle fonctionnelle	16
II-3 Etude de l'écoulement viscoelastique linéaire associé à la fonctionnelle linéaire tangente en 0	19
II-4 Etude des équations linéaires associées au problème et à la fonctionnelle linéaire tangente	21
II-5 Existence d'une suite de solutions w^n	22
Préliminaires - Inégalités de l'énergie	
Existence de $(w^n)_{n \in \mathbb{N}}$	
<u>CHAPITRE III</u>	
III-1 Existence d'une solution du problème	37
III. 1. 1 Estimations à priori	37
III. 1. 2 Convergence de la suite (w^n)	41
III-2 Unicité de la solution	50
Enoncé du théorème général	51
III-3 Cas des conditions aux limites indépendantes du temps - comportement asymptotique de la solution	53
<u>CHAPITRE IV</u> - APPLICATION - Détermination des fonctions de relaxation d'un fluide simple	56
IV-1 Mouvement plan-cône	56
IV. 1. 1 Equations générales	56
IV. 1. 2 Surimposition d'un mouvement non stationnaire à l'écoulement viscométrique précédent	58
IV. 1. 2. 1 Equation du mouvement	58
IV. 1. 2. 2 Etude du champ des vitesses	60
IV. 1. 2. 3 Application à la détermination des fonctions de relaxation	62
IV-II Ecoulement de cisaillement simple	64
Conclusion	68
Références bibliographiques	70

NOM DE L'ETUDIANT : LUCIUS Michel

Nature de la thèse : Doctorat ès Sciences Mathématiques.

"Etude d'une équation différentielle fonctionnelle non linéaire
régissant les mouvements instationnaires de fluides simples".

Vu, Approuvé

et Permis d'imprimer

NANCY, le 25 Novembre 1969

Le Doyen,



A handwritten signature in dark ink, consisting of a large, stylized 'J' followed by a horizontal line and a small flourish.

J. AUBRY

